Platón
y la
Academia de Atenas

Pedro Miguel González Urbaneja

27

La matemática en
sus personajes





Platón y la Academia de Atenas

Platón fue el gran inspirador de casi toda la especulación filosófica y matemática de su tiempo. Aunque no era propiamente matemático, su entusiasmo por las matemáticas era debido a la importancia que les otorgaba como preparación al estudio de la filosofía. De hecho, muchos diálogos de Platón están llenos de discursos matemáticos.

En la *teoría de las ideas*, la doctrina platónica de mayor influencia, Platón geometriza la realidad, es decir, convierte la filosofía en una matemática de la naturaleza. En toda la actividad intelectual de la Academia, que él fundó, las matemáticas, y en especial la geometría, alcanzan una significación filosófica y un valor ético, estético y político insoslayables.

Pedro Miguel González Urbaneja es profesor de matemáticas. Ha impartido numerosos cursos y conferencias y escrito diversos artículos y libros sobre filosofía, historia y didáctica de las matemáticas, entre los que se encuentra Pitágoras. *El filósofo del número*.

27

La matemática en sus personajes



Las matemáticas son como una catedral inacabada cuya construcción comenzó hace más de 3000 años.

Esta colección tiene como objetivo presentar, de una forma clara y al alcance de todos, como ha evolucionado esta ciencia hasta nuestros días.

El lector será un viajero en el tiempo. Conocerá a los personajes que a lo largo de la historia han ido colocando las piedras que han proporcionado al edificio de las matemáticas el aspecto que hoy tiene.

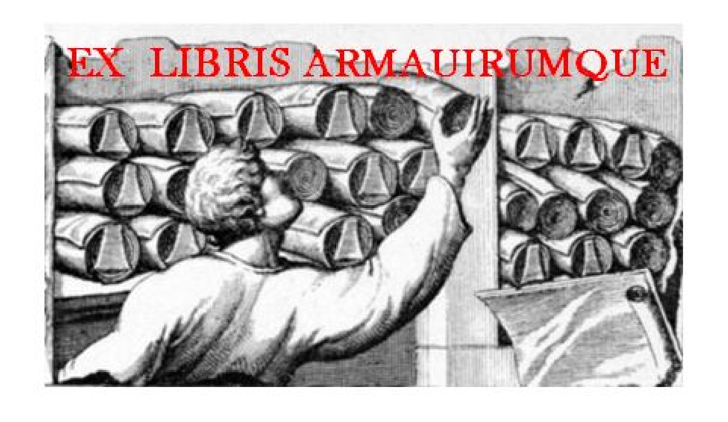
Pero conocerá no sólo a los constructores y a su producto acabado, sino también los materiales y andamios utilizados para ir levantando esta gran obra, las dificultades encontradas y el ingenio utilizado para vencerlas.

Disfrutará así plenamente de la belleza de las matemáticas, consideradas por tantos la reina de las ciencias.

La matemática en sus personajes



Platón
y la
Academia de Atenas



La matemática en sus personajes

Colección dirigida por Antonio Pérez Sanz

A mi querido hermano Javier, en el recuerdo

1ª edición: septiembre de 2006

Imagen de cubierta: Archivo Editorial NIVOLA.

Apartado de Correos 113. 28760 Tres Cantos
Tel.: 91 804 58 17. Fax: 91 804 14 82
www.nivola.com
correo electrónico: contacto@nivola.com

ISBN-10: 84-96566-25-0
ISBN-13: 978-84-96566-25-5
Depósito legal: M-35.479-2006
Impreso en España

Platón y la Academia de Atenas

Pedro Miguel González Urbaneja

27

La matemática en sus personajes



Índice



Introducción

"Platón dio a las matemáticas, y a la geometría en particular, un inmenso impulso, gracias al celo que desplegó por ellas, del que son testimonio suficiente sus escritos llenos de discursos matemáticos que despiertan el entusiasmo por estas ciencias en aquellos que se entregan a la filosofía".

Proclo. *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides.*

"Según Platón, la salvación individual se logra comprendiendo los valores eternos de verdad, belleza y bondad. La senda hacia esa comprensión reside en la matemática y la dialéctica."

B. Farrington. *Ciencia griega*. Icaria, Barcelona, 1979, p. 83.

"La Academia platónica es una escuela que mira a la geometría como una audacia del espíritu, remolque del alma hacia la verdad e impulso al pensamiento filosófico".

B. Levi. *Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001, p. 49.

Platón fue el gran inspirador, director y catalizador de casi toda la especulación filosófica y matemática de su tiempo. Con la fundación de la Academia de Atenas, Platón convierte esta institución en el centro de la actividad intelectual de la época. Siendo uno de los hombres más sabios de su tiempo, Platón no era propiamente matemático, pero su vehemente entusiasmo por las matemáticas –y su creencia en la importancia que estas ciencias tienen como propedéutica de la filosofía en la educación e instrucción de la juventud, en la comprensión del cosmos y en la forja del hombre de estado– hizo que se convirtiera en un insigne mecenas de matemáticos, debiéndose a sus discípulos y amigos casi toda la ingente producción matemática del momento, entre la que se debe men-

cionar aspectos concretos como poliedros, infinitesimales, cónicas, curvas, etc., pero, sobre todo, cuestiones de metodología del razonamiento en matemáticas en relación con sus fundamentos, de gran influencia sobre los *Elementos* de Euclides, y en particular la solución a la grave crisis de los inconmensurables que emergió en la escuela pitagórica.

La doctrina platónica de mayor influencia en la historia del pensamiento es la *teoría de las ideas*, que tiene su origen en las formas geométricas, y es en el ámbito matemático precisamente en el que mejor se puede ilustrar, sobre todo por el significado de la *participación* –presencia de la idea en el objeto–, lo que da una imagen de la trascendencia de la matemática en la naturaleza y desarrollo de la filosofía de Platón. De hecho muchos *Diálogos* de Platón están plagados de discursos matemáticos, y en concreto en *La República*, Platón prescribe que para adquirir un espíritu filosófico es necesaria una exhaustiva formación en las cuatro ciencias del *Quadrivium pitagórico* como base preliminar ineludible del supremo conocimiento dialéctico del bien, la belleza y la justicia, verdadera finalidad de los estudios filosóficos, de modo que en toda actividad intelectual de la Academia, la matemática, y en especial la geometría, como imprescindible preludio, alcanzan una significación filosófica y un valor ético, estético y político insoslayables.

Platón geometriza toda la realidad, y en la construcción de la cosmogonía del *Timeo* la mágica belleza de la geometría de los poliedros asume una misión generatriz de los elementos naturales, de modo que el Universo entero responde a una estructura geométrica responsable del orden cósmico pitagórico, establecido por la divinidad con base en la justa y bella medida fundada en las formas y los números esenciales de la geometría y la aritmética.

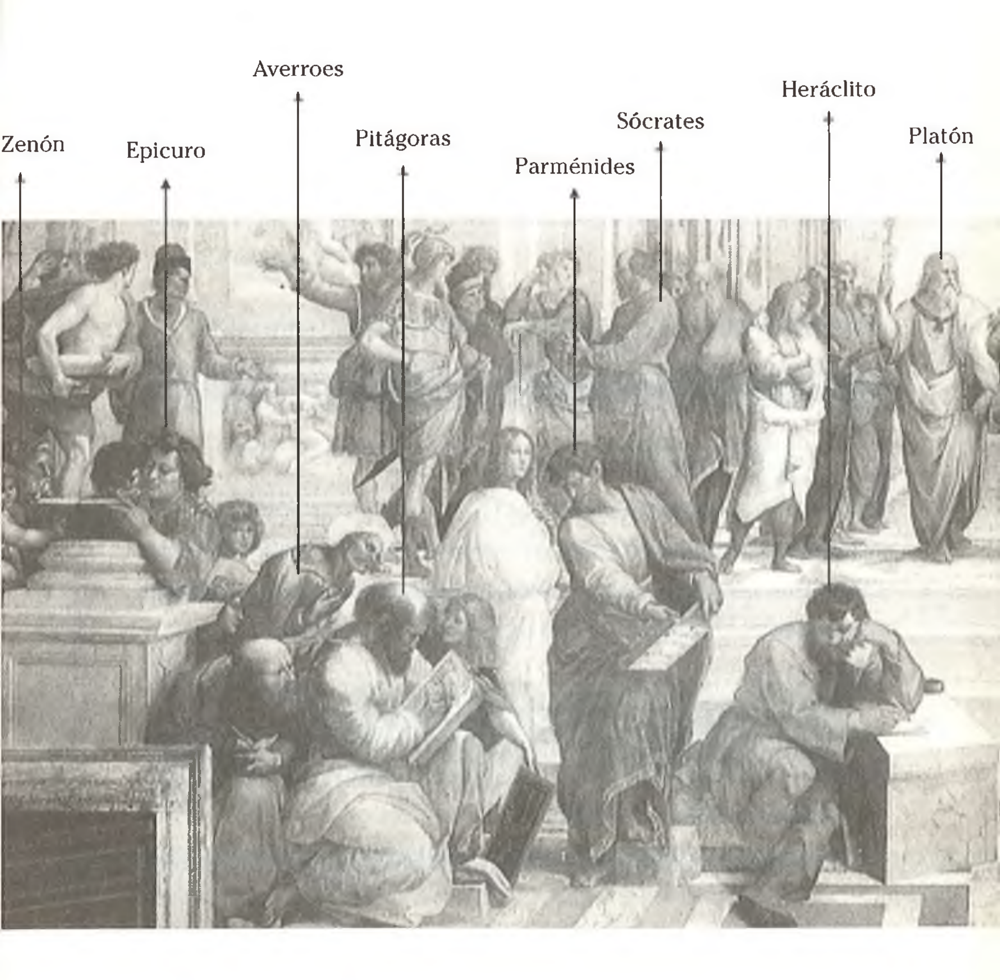
Platón ha sido uno de los filósofos que mayor influjo ha tenido en la historia del pensamiento y que mayor atractivo ha ejercido sobre las concepciones acerca de la realidad matemática.

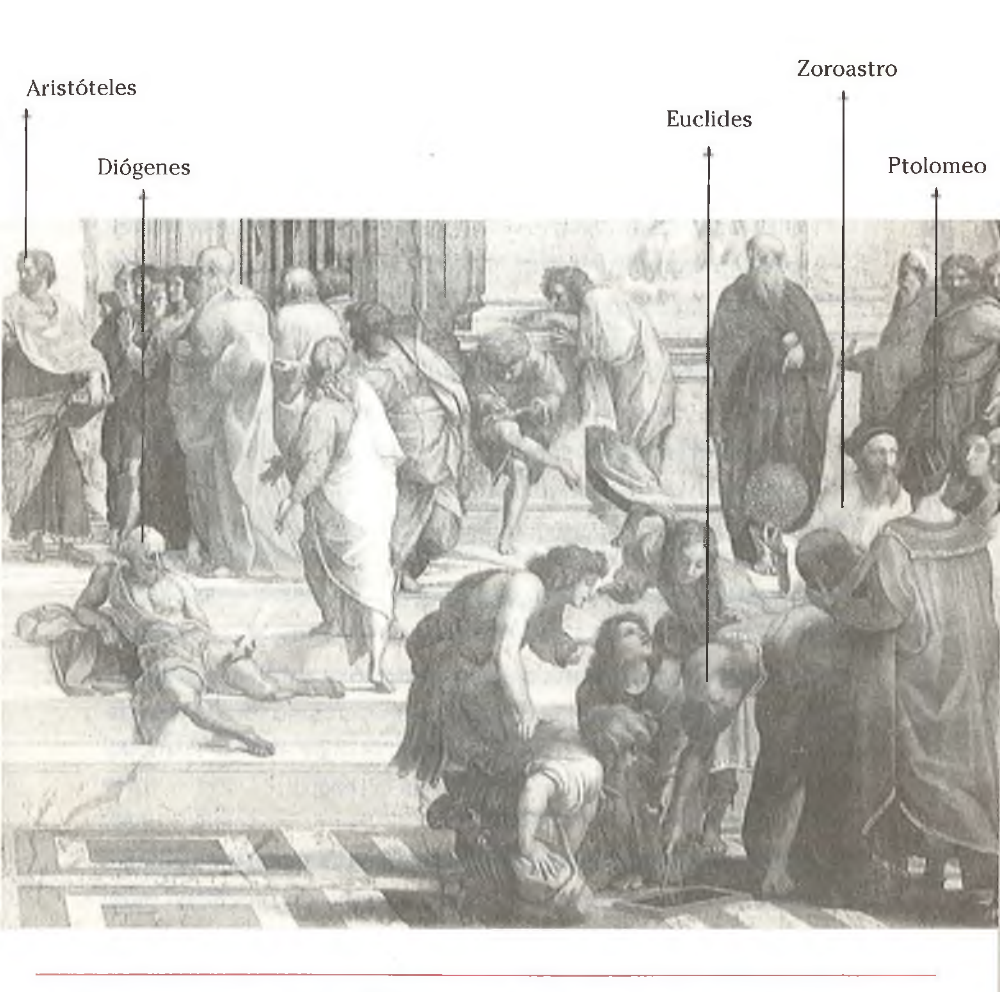
1 Las matemáticas y la filosofía en el mundo griego

"Puesto que los primeros matemáticos griegos eran esencialmente filósofos, nada tiene de extraño que fundaran sus conocimientos sobre principios lógicos y que al ir formando la aritmética como ciencia que estudia los números y sus propiedades partieran de una base filosófica".

J. A. Sánchez Pérez. *La aritmética en Grecia*. CSIC, 1954. p. 180.

La matemática y la filosofía tienen un origen común en el horizonte histórico helénico del siglo VI a.C., que transforma la protociencia del pensamiento empírico y técnico de los pueblos orientales en pensamiento especulativo, que, espoleado por una admiración activa hacia el cosmos, y más allá de la poesía y del mito, intenta explicar de modo lógico el Universo y los fenómenos naturales de una manera que sustituye la intervención caprichosa de los dioses por leyes inexorables cognoscibles a través de la razón y la experimentación. Con ello se humaniza la religión, e incluso se fundamenta la doctrina en bases científicas, y sobre todo matemáticas, como instrumentos de purificación moral, de belleza y armonía, de formación educativa y de base política.


Averroes
Heráclito
Sócrates
Platón
Zenón
Epicuro
Pitágoras
Parménides



La *Escuela de Atenas* (1509-1510), fresco de impresionante perspectiva que se encuentra en el Vaticano, es una exaltación de la filosofía, la ciencia y la matemática, en el que Rafael rindió un magnífico homenaje a la investigación racional de la verdad en el mundo griego, al concentrar en armónica y animada concurrencia a los filósofos, científicos y matemáticos más eminentes de la Antigüedad clásica griega, que meditan en silencio o debaten apasionadamente. Los sabios representan las diversas escuelas filosóficas y las diferentes disciplinas de las artes liberales.

La obra de Rafael evoca la idea renacentista de Marsilio Ficino del templo de la filosofía, un mundo de belleza y simetría, de equilibrio y proporción, de grandiosidad y de rigor donde imperan las leyes de la armonía, del número y de la geometría para deleite de la mirada y complacencia de la razón.

El primer capítulo de la obra de B. Russell *Historia de la filosofía occidental* titulado "La aparición de la civilización griega" empieza con las siguientes palabras (Austral, 1995, p. 41):

> "*En la historia entera no hay nada tan sorprendente o tan difícil de explicar como la repentina aparición de la civilización griega.* [...] *Lo que realizaron los griegos en arte y literatura es conocido por todo el mundo, pero lo que llevaron a cabo en el campo puramente intelectual es aún más excepcional. Inventaron las matemáticas, la ciencia y la filosofía*, [...], *especularon libremente sobre la naturaleza del mundo y las finalidades de la vida, sin estar encadenados a ninguna ortodoxia heredada. Es tan asombroso lo que hicieron que hasta el día de hoy los hombres se maravillan y hablan místicamente del genio griego*".

Se acepta que la historia del pensamiento occidental comienza cuando el hombre es capaz de distinguir con claridad dos formas de acceso al conocimiento de la realidad: el *mito* –que se sustenta en la imaginación– y el *logos* –basado en la razón.

El mito es un una forma de pensamiento prelógico donde cabe la fantasía, el sueño y el deseo. Es un sistema de creencias para interpretar los misterios del Universo y para explicar la creación del mundo y los enigmas que gravitan sobre la humanidad en el que no se delimita dónde acaba lo divino y dónde empieza lo humano. Los poemas de Homero (siglo IX a.C.), donde el destino de los hombres está sometido a la voluntad y al capricho de los dioses, y la *Teogonía* de Hesiodo (s. VIII a.C.) –cosmogonía de la creación del mundo a partir del caos– son las dos manifestaciones más importantes del pensamiento mítico griego.

La revolución intelectual que realiza el tránsito del *mito* al *logos* y del *caos* (desorden inicial) al *cosmos* (Universo ordenado), es decir, de la mítica creencia al conocimiento racional, tiene lugar

hacia el siglo VI a.C. en las costas jónicas de Asia menor, sobre las que gravitaba la presión cultural de las civilizaciones del Próximo Oriente donde brillaban saberes matemáticos y astronómicos con un espíritu de geometrización y de cuantificación aritmética que, asimilados por los griegos, estimularon la investigación directa y racional de los misterios del Universo y de las leyes de la naturaleza. Poco después, la misma revolución tiene lugar, como parte del mismo proceso intelectual, en las colonias griegas de la Magna Grecia (Sicilia y el Sur de Italia) y finalmente alcanza también a Atenas.

En la civilización griega se constituye la *polis* alrededor de un espacio central, el *ágora*, la plaza pública, centro cívico de distracción y controversia donde se reúnen los ciudadanos para decidir sobre los problemas colectivos, y también para discutir la cuestión del principio básico (*arkhé*) de todas las cosas, de la sustancia del mundo en sentido cósmico y universal. Esta novedosa organización, la *polis*, instaura la *ciudad-estado* bajo la preeminencia del *logos*, que es la discusión libre acerca de los asuntos públicos, pero ante todo la reflexión sobre todos los demás temas y cosas, lo que va a encarnar los cimientos de la filosofía y la ciencia, entendiendo por ésta no sólo los conocimientos y descubrimientos técnicos y matemáticos sino sobre todo la discusión y fundamentación teórica de los mismos.

Una organización política adecuada es el fundamento de la ciencia y la filosofía, como entronización del *logos*, que se entiende como explicación racional y libre de todos los acontecimientos de la vida –humanos, políticos, científicos, jurídicos, artísticos y literarios–, que en conjunto constituyen la filosofía. En su origen griego, pues, la filosofía estaba vinculada de forma indisociable a muchos ámbitos de la actividad intelectual humana y su realidad aparece como la racionalización de la discusión sobre las cosas.

El pensamiento filosófico arranca con una nueva actitud –el asombro ante el espectáculo de la naturaleza–. Pero más allá de

la admiración pasiva o poética, la filosofía propone una contemplación objetiva –es decir, científica– que al trascender al propio observador transforma la visión de la realidad en *theoria* –término que en griego significa precisamente contemplación y espectáculo– como clave de la explicación racional de los fenómenos naturales, hacia la búsqueda de un cuerpo de doctrina abstracto en el que las matemáticas jugarán un papel primordial no sólo en desentrañar los misterios de la naturaleza sino también en su elucidación, descripción y exégesis para hacerlos inteligibles a la razón humana. Desde el mismo origen común de las matemáticas y la filosofía en la contemplación del espectáculo del Universo entero, las matemáticas inician un proceso y se arrogan una labor de dar cuenta –aspiran a *dar razón* en sentido filosófico– del orden natural, en un proceso que se inicia con Tales y Pitágoras, se consolida con Platón y culmina con la física de Galileo, Newton y Einstein.

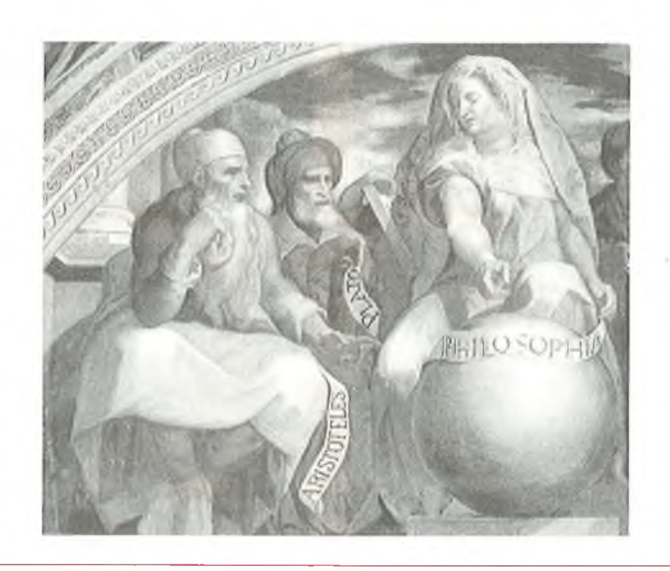
El propio Platón certifica que la capacidad de admiración ante la naturaleza y la realidad total fue el origen de la filosofía. En su diálogo *De la ciencia* (*Teeteto*, 155a) escribe:

> *Muy propio de filósofo es el estado de tu alma: la admiración. Porque la filosofía no conoce otro origen que éste.*

También conviene citar, al respecto de la misma idea, a Aristóteles (*Metafísica*, 982b):

> "*Fue la admiración lo que inicialmente empujó a los hombres a filosofar.* [...] *Si el filosofar fue en los primeros filósofos una huida de la ignorancia, es evidente que los filósofos perseguían con ello el saber mismo, movidos por el afán de conocer y no por fin alguno utilitario.* [...]".

Aristóteles inserta esta reflexión en el marco de la consideración de la filosofía como ciencia de las primeras causas y de los primeros principios, tras el reconocimiento de la propia ignorancia



La filosofía instruyendo a Platón y Aristóteles. Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P. Tibaldi (1586). La filosofía está ubicada en el centro de la composición como una bella matrona de grandes proporciones. Tiene ante sí una esfera que representa la tierra o el Universo como símbolo de la idea de que la filosofía domina todos los conocimientos y es la fuente de toda ciencia. Mientras Platón –en actitud especulativa– está absorto escuchando a la filosofía como madre ciencia, Aristóteles parece estar en plena conversación con ella. El gesto de su mano indicando la esfera parece ratificar su interés por la filosofía como ciencia natural.

que sigue a la admiración ante los fenómenos naturales, con la voluntad de dar cuenta de ellos. Hallamos, pues, en el texto aristotélico un acta de nacimiento que asigna a la filosofía la condición de etiología fundamental: ciencia de las primeras causas y principios, cuya consideración depende de una disposición original que lógicamente implica la convicción de que la causa es susceptible de ser encontrada. He aquí un talante nuevo en la historia de la humanidad: la actitud filosófica, que supone ante todo que la naturaleza es cognoscible, es decir que cabe *dar cuenta o razón* de lo que ella muestra.





Alegoría de las matemáticas en sus dos vertientes: la aritmética y la geometría. Fragmentos de frescos de la Biblioteca de El Escorial de P. Tibaldi (1586).

La aritmética y la geometría están representadas por figuras femeninas con sus diversos atributos de cálculo y medida, necesarios para *medir proporciones*, trasunto de comprender, ya que *proporción* es uno de los sentidos del término *logos* de la filosofía.

La nueva actitud inaugura un proyecto que marca la razón indisociablemente filosófica y científica que se configura en la cultura griega. Algunas manifestaciones del mismo son la física de Tales, Anaximandro, Anaxímenes y Empédocles, la teoría atomista de Leucipo y Demócrito, la teoría de la sustancia del mismo Aristóteles, pero nos interesan especialmente la cosmovisión panmatemática del pitagorismo y la construcción matemático-idealista de su epígono, el platonismo, sistemas filosóficos de orientación matemática en los que no sólo la naturaleza es cognoscible sino que el Universo

entero se hace inteligible para el hombre a través de las entidades matemáticas, aritméticas y geométricas.

La cultura griega realiza el primer tránsito hacia la matematización de la experiencia humana, tanto la racional como la sensorial, al cultivar especialmente una ciencia –las matemáticas– que, más allá de explicar, describir e interpretar los misterios de la naturaleza, con Pitágoras reduce primero la ciencia de las cosas a la ciencia de los números y con Platón geometriza después toda la realidad, es decir, convierte la filosofía en unas matemáticas de la naturaleza. Del número como esencia –en Pitágoras– a todas las matemáticas en sentido especulativo para elevarse de lo perecedero y contingente a la contemplación de la verdad suprema y discurrir sobre las esencias y las ideas puras de la filosofía –en Platón–, de modo que la ciencia matemática cubre la aspiración filosófica.

La filosofía griega ejerció una influencia definitiva en la aparición y desarrollo de las matemáticas racionales en el mundo griego. En la civilización helénica las matemáticas están completamente empapadas del espíritu griego, en el que el pensamiento conceptual general y el pensamiento matemático son aspectos esenciales de la cultura y por tanto la filosofía y las matemáticas están interpenetradas de forma muy significativa.

A los vocablos filosofía y matemáticas les damos el significado actual, después de varios siglos en que la ciencia está desgajada de la filosofía. Pero Platón y Aristóteles, los dos filósofos griegos que han acuñado la mayor parte de la terminología básica de la filosofía y de la ciencia, no habían señalado de forma literal diferencias radicales entre ambas, aunque la distinción entre el uso de uno y otro término parece residir en que, de acuerdo con la etimología, la filosofía debía designar una actitud vital de amor a la verdad, mientras que la ciencia o *epistéme* aludiría a la forma de acceder a esa verdad como conocimiento universal, algo distinto de la experiencia o *empeiría* que sólo persigue lo particular.

En cuanto a las ciencias matemáticas, se las concibe como una forma de filosofía o como una de las disciplinas filosóficas. Así lo interpretamos en algunos textos de Platón y Aristóteles:

> *[...] Hay algunos que demuestran interés por la geometría o cualquier otro tipo de filosofía.* (Platón, *Teeteto*, 143d)

> "*[...] Hay tres filosofías especulativas: las matemáticas, la física y la teología*". (Aristóteles, *Metafísica*, VI.1, 1026a)

También en el texto fundamental de Proclo, *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*:

> "*Pitágoras transformó la doctrina filosófica que trata de la geometría en enseñanza liberal, examinó desde lo alto sus principios e investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual*".

El *Comentario* de Proclo se refiere a las matemáticas como una disciplina que se justifica por sí misma, es decir, libre en sentido aristotélico –"*no se persigue en su investigación ningún interés extraño a ella misma*"–, cuyos conceptos sobre los que establece sus juicios no proceden de la experiencia. Naturalmente hay implícitos matemáticos (geométricos y aritméticos) en gran parte de la actividad humana cotidiana y las matemáticas están omnipresentes en el entorno social y natural del hombre cubriendo una serie de necesidades prácticas. Pero no es a estas matemáticas a las que se refiere Proclo de forma solemne, sino a unas matemáticas que como objetivo último de la razón quedan homologadas en dignidad a la filosofía. O quizá algo más todavía, expresado por V. Gómez Pin en su obra *La tentación pitagórica* (Síntesis, Madrid, 1999, pág.35), en las siguientes preguntas:

> "*¿Los objetivos de inteligibilidad propios de las matemáticas vienen a sustituir en el trono a los objetivos –diferentes– que se habían asignado a la filosofía? ¿O diremos más bien que los*

primeros se revelan como el contenido mismo buscado por la filosofía, que la realización de la aspiración matemática sería la realización de la aspiración filosófica?"

Y, como afirma a continuación:

> *"La respuesta a lo largo de la Historia del Pensamiento encuentra* [inicialmente] *sus posiciones paradigmáticas en las posiciones comunes al pitagorismo y al platonismo de los sucesores de Platón en la Academia".*

Podemos entender hoy que la filosofía aspira a *dar cuenta y razón* de la totalidad del saber, en tanto que la ciencia buscaría la explicación de aspectos particulares de la realidad. Pero en el mundo helénico no era exactamente así. Platón y Aristóteles, sin distinguir fehacientemente entre filosofía y ciencia, parecen ofrecer el tipo de causa buscada como elemento de cierta diferenciación entre ambas. La búsqueda de las *causas primeras* (*Timeo,* 46d–46e; *Metafísica*, I.2, 982b–983a), que sirve de fundamento a lo que se trata de explicar, movería a la filosofía, mientras que el examen de *las causas segundas* (*Fedón*, 99b), causas necesarias o *conditio sine qua non*, nos acercaría a la ciencia. En cualquier caso y al ceñirse a filosofía y matemáticas, podemos decir que en la filosofía griega predomina la búsqueda de las causas primeras al tiempo que en las matemáticas griegas se recurre ante todo a la causa necesaria, de la que no habla concretamente Aristóteles de forma directa, pero que tendría que ver con el tratamiento que hace de las ciencias apodícticas –que proceden por demostración deductiva– en los *Segundos Analíticos* II.11, 94a.

Es un tópico común poner de relieve la contribución fundamental de las matemáticas griegas al desarrollo de la filosofía y la ciencia en Occidente. La denominación misma de *matemáticas* y *matemáticos* en la mayoría de las lenguas europeas es de origen griego, derivada del verbo *conocer* o aprender. *Mathema* significa-

ba en griego *lo que se ha aprendido o entendido*, o *conocimiento adquirido*, incluso, forzando un poco la semántica, *conocimiento que se puede adquirir* o *conocimiento que se puede aprender*, es decir, *conocimiento que se puede adquirir por aprendizaje*; pero bien entendido que *mathema* no se refiere a un tipo determinado o específico de conocimiento sino a *todas las formas de conocimiento*, antes de que el término derivado *matemáticas* adquiera el sentido más especializado que nosotros le damos actualmente.

Los términos filosofía y matemáticas

Por diversas fuentes sabemos que fue Pitágoras quien utilizó por primera vez, es decir que acuñó, en el lenguaje del saber, los términos de filosofía y matemáticas. Según Diógenes Laercio (Vida de los filósofos más ilustres, Libro I, Proemio, VIII, pp.11–12):

"Pitágoras fue el primero en usar el nombre de filosofía y se llamó a sí mismo filósofo o amante de la sabiduría".

También leemos en el Libro I *de la* Introducción a la aritmética *de Nicómaco de Gerasa:*

"Inspirándose en Pitágoras, los antiguos fueron los primeros que definieron filosofía diciendo que era el amor a la sabiduría, que tal es lo que significa etimológicamente dicha palabra".

Sobre el significado de matemáticas escribe el filósofo neoplatónico Proclo en el prólogo de su Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides:

La matemática helénica desde Tales y Pitágoras a Platón y Euclides sustituye los fines técnicos aislados por la pura satisfacción espiritual, progresivamente consciente de sus inquietudes y anhelos racionales y de su precisión de unidad, que se establecen como exigencias de inteligibilidad dentro de los esfuerzos por *conocer y comprender* todo el Universo. Tras los primeros pitagóricos se alcanza la clara visión de las matemáticas como una *ciencia liberal y desinteresada*, de una ciencia por la ciencia, de una ciencia pu-

"El nombre de matemáticas dado a una ciencia de razonamientos creemos que proviene de los pitagóricos, los cuales comprendieron que todo lo que se llama *mathema* es una reminiscencia depositada en las almas desde fuera, como las imágenes que, emanadas de los objetos sensibles, se impregnan en la imaginación, no formada por episodios, como el conocimiento de opinión, sino sugerida desde dentro por el conocimiento razonado volviéndose sobre sí mismo".

Proclo alude a la denominación de matemáticas en relación con la concepción pitagórica de esta actividad intelectual como encarnación del conocimiento mediante reminiscencia, de modo que matemáticas derivaría del término mathema, *vinculado al significado de conocer o aprender, pero no a un ámbito específico del saber sino al saber en sí, de ahí los estrechos vínculos primigenios de las matemáticas con la filosofía, como actividades intelectuales que no sólo tendrían un origen común sino que en el nacimiento de las matemáticas en Grecia se realiza la condición de la filosofía de dar cuenta o razón de la realidad al construir el conocimiento. Precisamente,* dar cuenta o razón *son términos matemáticos.*

ra, como diríamos hoy, que cristalizará, bajo la acción de los matemáticos de la Academia de Platón, en la codificación de las matemáticas en un cuerpo axiomático–demostrativo, los *Elementos* de Euclides, modelo de ciencia única y sintética, sin ningún tipo de grieta apodíctica. Recordemos unas palabras de A. Rey de *El apogeo de la ciencia técnica griega* (UTEHA, México, 1962. Vol. 2, pág. 229):

> "*Mucho más que en la contribución del acervo matemático, fue Grecia grande, al inventar los métodos, todos los métodos que hicieron nuestra ciencia* [...] *y al crear su espíritu, el espíritu racional* [...], *que no es otra cosa que el pensamiento científico mismo; es decir: el pensamiento y la filosofía*".

En síntesis, no sólo podemos apreciar un origen común de las matemáticas y la filosofía en los albores del pensamiento racional en el pueblo griego, sino las inalienables implicaciones recíprocas entre ellas, de la filosofía en la conformación de la propia naturaleza de las matemáticas como ciencia y de las matemáticas como condición ineludible de la filosofía, cuestiones que se van a reforzar de forma muy notable en la extensa y brillante actividad intelectual de la Academia platónica.

2 La Academia

"Los matemáticos de la Academia realizaron investigaciones siguiendo las instrucciones de Platón, planteándose cuestiones acerca de lo que podía contribuir a la filosofía de su maestro".

Proclo. *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides.*

Aristocles fue el auténtico nombre de Platón, sobrenombre que se le adjudicó por sus anchas espaldas. No está claro ni el año ni el lugar de su nacimiento aunque es probable que fuera en el año 427 a.C. en Atenas, o quizás en Egina. Pertenecía a una familia aristocrática vinculada con la vieja nobleza de Atenas, enemiga de la demagogia que entonces imperaba. Su padre, Aristón, decía ser descendiente de Codro, el último rey de Atenas. Su madre Períctiona, descendía de la familia de Solón, el antiguo legislador griego.

Platón recibe una excelente educación en todas las ramas del saber. A los veinte años conoce y se hace discípulo del gran encantador de la juventud griega, Sócrates, que por entonces tenía 63 años, y convive con él ocho años, hasta el 399 a.C., en que las enemistades personales crearon en torno al filósofo de la mayéutica un

enrarecido ambiente que dio origen a la acusación de impiedad y corrupción de la juventud, lo que llevó a los jueces atenienses, demasiado nerviosos por los acontecimientos políticos y militares de fines de siglo, a condenarle a beber la cicuta.

Sócrates y las matemáticas



Sócrates maestro de Platón. Ilustración de un tratado inglés de astronomía del siglo XIII.

Según Platón, Sócrates encontró en la naturaleza del conocimiento matemático un argumento en favor de la inmortalidad del alma y de sus doctrinas éticas. Para Sócrates, los objetos matemáticos y las figuras ideales de sus definiciones no se derivan de los sentidos, y los teoremas de la geometría son independientes de la

A la muerte de Sócrates, por miedo a ser importunado por su condición de amigo y discípulo del filósofo, Platón se refugia en Megara, donde permanece unos tres años en contacto con la escuela de filosofía de Euclides de Megara –que interviene al comienzo del

experiencia; son verdades absolutas e inmutables, de modo que las almas que conocen tales verdades deben haberlas adquirido en otro mundo de verdades eternas. Y lo mismo ocurre con todas las demás verdades y formas ideales de la justicia, la belleza, el bien... Su conocimiento es parte de la herencia que el alma trae consigo de su existencia anterior.

En todas las almas hay un conocimiento latente de las verdades matemáticas y de todas las demás, que en un acto de reminiscencia se despiertan a través de la enseñanza. Es particularmente importante empezar por la educación matemática porque orienta el espíritu desde el mundo sensible hacia las formas puras e ideales, y le prepara para los estudios filosóficos, que tienen como finalidad la búsqueda racional de la verdad y el bien absolutos, en el camino hacia la virtud.

Sócrates aplicó la mayéutica como método heurístico de acceso al conocimiento –que Platón expone en el Menón*–. Al introducir el* principio de la definición, *Sócrates perfeccionó la técnica de la lógica, útil principal para el matemático y sentó una de las bases de la doctrina platónica de las ideas o las formas.*

*Aristóteles escribe sobre Sócrates (*Metafísica, *987b):*

"La doctrina de Sócrates no se extiende al estudio de la naturaleza total sino que se mantiene tan sólo en la esfera de lo moral, aunque en este terreno tendiera a la investigación de lo general y fue el primero que tuvo la idea de dar definiciones de las cosas".

Dialogo sobre la ciencia, el *Teeteto*, y al que secularmente se le ha confundido con el autor de los *Elementos*–, y empieza a escribir.

Durante los diez años siguientes, tal vez ya en Atenas, con un inefable arte literario, Platón redacta los primeros *Diálogos* en los que va plasmando las ideas de la enseñanza socrática; pero, poco a poco, va advirtiendo las limitaciones de la filosofía de su maestro –está muy bien hacer la crítica de la presunta sabiduría de políticos y sofistas, pero es insuficiente–; había que buscar elementos más

Arquitas



Arquitas de Tarento. Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P. Tibaldi. 1586.

Arquitas de Tarento fue un eximio matemático pitagórico, exitoso político e invicto militar (llegó a ser homenajeado por Horacio en sus Odas, *I.28) que tuvo la suerte de contar a Platón entre sus discípulos, y a quien inculcó una reverencia casi sagrada ha-*

sólidos y seguros sobre los que basar una filosofía más positiva y a Platón le parecía que los encontraría en las matemáticas en general y en el pitagorismo en particular.

Con estas intenciones, Platón viaja a la Cirenaica, donde escucha las lecciones del gran geómetra Teodoro de Cirene, a quien considera uno de sus maestros –que intervendrá también en el *Teeteto*–; y más tarde se traslada a Tarento, en Italia meridional, donde se impregna de las doctrinas pitagóricas a través de la expo-

cia las matemáticas. Muy preocupado por la educación, Arquitas señaló siempre el papel relevante que las matemáticas deberían tener en la formación de los jóvenes.

Se atribuye a Arquitas la clasificación de las cuatro ramas del Quadrivium*: la aritmética, que estudia los números en reposo; la geometría, que estudia las magnitudes en reposo; la música que estudia, los números en movimiento y la astronomía, que estudia las magnitudes en movimiento.*

*Como geómetra, Arquitas fue pionero en la valoración del estudio de la estereometría (geometría del espacio tridimensional), querencia heredada por Platón (*La República*, 528b), que aplicó de manera asombrosa a la solución del problema de la duplicación del cubo. También introdujo la idea cinemática de considerar una curva generada por un punto en movimiento y una superficie engendrada por una curva en movimiento.*

Pero, sin duda alguna, la mayor contribución de Arquitas a las matemáticas fue el haber salvado la vida de Platón en uno de los viajes que el filósofo hizo a Italia, intercediendo por él ante el tirano Dionisio.

sición programática del pitagorismo que había escrito Filolao y del magisterio de Arquitas, llamado el *último pitagórico,* un científico eminente, brillante político y legislador, que enfatizó la relevancia que tienen las matemáticas en la educación. En su estancia en Italia, Platón se empapa de las tesis pitagóricas: inmortalidad y trasmigración de las almas; la estructuración, descripción e interpretación del Universo en términos de entidades matemáticas; los estrechos vínculos recíprocos entre matemáticas y filosofía; el entusiasmo místico de la pasión por el conocimiento matemático como forma de vida filosófica articulada en una comunidad, etc.

A su regreso a Atenas, Platón escribe otros *Diálogos*, en los que en boca de Sócrates, expone ya no sólo doctrina socrática, sino argumentos pitagóricos, que evolucionan hacia temas platónicos originales. Así sucede en el *Gorgias*, y sobre todo en el *Menón*, en el que Platón describe, con argumentos geométricos vinculados al problema de la *duplicación del cuadrado* (82b-85b), nociones pitagóricas sobre inmortalidad y trasmigración de las almas enlazadas con la teoría del conocimiento como recuerdo o reminiscencia.

Platón viaja varias veces más a Italia continental y desde aquí a Sicilia, y vive numerosas vicisitudes políticas y personales, entre ellas, en el año 388, un secuestro en una nave espartana y su liberación como esclavo gracias a un amigo que había conocido en Cirene. Incluso después de la fundación de la Academia, Platón volverá en otras dos ocasiones a Siracusa, dejando al frente de la Academia la primera vez al gran matemático Eudoxo y la segunda a Heráclides Póntico, y vive nuevos episodios peligrosos, al ser, primero desterrado y luego encarcelado por el tirano Dionisio.

La Academia de Atenas es fundada por Platón hacia el 387 a.C. como institución inspirada en la comunidad pitagórica imbuida por la idea de buscar el bien y la verdad a través del conocimiento matemático y filosófico. No obstante, la Academia desarrolló una gran libertad intelectual, con una gran amplitud de miras y una trans-

parencia opuesta al secretismo, esoterismo y dogmatismo de los pitagóricos.

La Academia platónica estaba situada extramuros de Atenas, a unos 1.500 metros de la ciudad. Su nombre deriva de su ubicación en los jardines del santuario dedicado al héroe Akademos, en cuyas avenidas a la sombra se podía disfrutar del paseo mientras se filosofaba de forma peripatética. Asimismo, la Academia disponía de edificios y otros solares, donde se desarrollaba la actividad intelectual en conversaciones, coloquios y debates dirigidos por un moderador, y también en lecciones magistrales, en las que impartían doctrina el propio Platón y sus ayudantes.

De vez en cuando, la Academia organizaba conferencias publicas, de asistencia libre, haciéndose famosas las que impartía Platón, que, con títulos alusivos al bien y a la justicia, atraían una gran concurrencia de personas, que, a veces, sufrían una gran decepción cuando más que de cuestiones éticas y políticas, se hablaba de temas geométricos (según relata Aristógeno, discípulo de Aristóteles, en *Elementa Harmonica* II). Aunque se supone que los atenienses estaban avisados de la orientación geométrica que siempre imprimía Platón a sus charlas, ya que es casi legendario el hecho de que en el frontispicio de la entrada de la Academia había una inscripción que rezaba: "*No entre nadie ignorante en geometría*". En efecto, para Platón la geometría es una ciencia superior que tiene como sagrada misión desviar el alma de las cosas materiales y orientarla hacia la contemplación de las ideas, sobre todo las del bien, la belleza y la justicia, como realidades inteligibles y eternas. Por tanto, en toda enseñanza de la Academia la geometría adquiere una trascendencia filosófica.

Por los escritos de Platón podemos inferir que una finalidad de la Academia como institución pudo ser la sólida formación intelectual de un grupo de personas, una especie de tecnócratas ilustrados –valga el anacronismo–, muy bien preparados para poder susti-

Platón y la Academia de Atenas



Platón, fragmento de un mosaico bizantino, Römisch Germanischesmuseum. Colonia.

Los Diálogos *de Platón no son exactamente el desarrollo programático de la Academia, aunque sólo mediante estos textos se puede conocer este programa. Uno de los más importantes campos de investigación de la Academia era la dialéctica, que era la forma suprema de la actividad pedagógica y se concebía como el arte de pensar ligado al lenguaje, es decir, como una gramática de las ideas. No obstante, Platón establece que su enseñanza no debe ser prematura, y que incluso antes de los treinta años podría ser perjudicial, si previamente no se ha profundizado en el elenco de disciplinas matemáticas (aritmética, geometría, música y astronomía) imprescindibles para la formación de los filósofos gobernantes.*

Además de la dialéctica y los saberes matemáticos propedéuticos, la Academia se aplicó sobre otros campos de investigación. Espeusipo, sobrino y sucesor de Platón en la dirección de la Aca-

demia, escribió ampliamente sobre historia natural, y los trabajos de Aristóteles sobre biología fueron realizados en su mayor parte durante su estancia en la institución. La Academia fue también muy activa en jurisprudencia y legislación y Eudoxo y Aristóteles escribieron leyes para las ciudades de Cnido y Estagira, respectivamente.



Platón dando una lección de geometría a sus discípulos en *La Academia de Atenas* (mosaico procedente de Pompeya. Mansión de Siminio Estéfano, siglo I a.C. Museo Arqueológico, Nápoles). Según otras interpretaciones, este mosaico podría más bien representar a los siete sabios de Grecia.

tuir a la clase política ateniense, inepta y corrupta, que detentaba el poder en la época, ya fuera al tirano codicioso que sojuzgaba al pueblo o al demócrata adulador que halagaba y satisfacía sus caprichos. Platón hablará a lo largo de *La República* de la formación del filósofo–gobernante que tiene la sagrada misión de hacer mejor a los ciudadanos a través de una actuación política que, lejos de la ambición personal y los deseos demagógicos del pueblo, se basaría en el conocimiento supremo dialéctico de los paradigmas eternos del bien y la justicia, a los que se asciende, según la tradición pitagórica, a través de un largo entrenamiento en el pensamiento abstracto, exacto y deductivo, vinculado a las ciencias matemáticas. Así pues, buena parte de los estudios y campos de investigación de la Academia tendrían que ver con las cuatro materias del *Quadrivium* de Arquitas, fundamentales para la formación de los filósofos gobernantes tal como se presenta en el Libro VII de *La República*: aritmética (525a–526c), geometría (526d–528b), astronomía (528e–530c) y música (530d–531c), todas ellas disciplinas matemáticas que constituían una propedéutica necesaria a la ciencia suprema de la dialéctica. También en el *Epínomis* –cuya atribución a Platón no es segura– se definen qué estudios conducen a la sabiduría y se hace un listado de disciplinas que sigue de forma casi literal lo expuesto en el libro VII de *La República.*

3 La teoría platónica de las ideas

"El mundo platónico de las ideas es la forma revisada y refinada de la doctrina pitagórica de que el número es la base del mundo real".

A. Whitehead, *La matemáticas en la historia del pensamiento* (en *SIGMA, el mundo de las matemáticas*, Vol. 1, pág. 332)

Los primeros matemáticos griegos eran filósofos y la filosofía en general ejerció una influencia definitiva en la gestación y desarrollo de las matemáticas griegas. Platón no sólo continuará esta tradición sino que estrechará aún más los vínculos entre matemáticas y filosofía, que se cultivarán de consuno en la Academia.

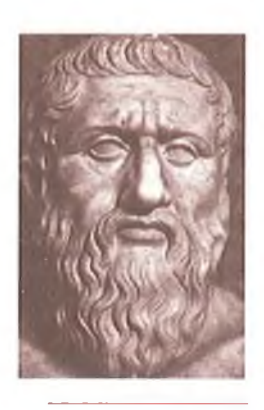
Los filósofos se interesan por las ideas y las formas abstractas de las que se ocupan las matemáticas, ideas que según Platón son afines a otras tales como la bondad, la belleza, el bien, la verdad, la justicia, etc., cuya intelección es la meta de la filosofía platónica. Los filósofos especulan sobre todas estas ideas en orden a vislumbrar la sociedad ideal y el estado perfecto, para lo que hay que distinguir

de forma nítida y clara entre el mundo de las ideas y el mundo de las cosas. Las relaciones en el mundo material están sujetas a cambios y no representan por ello la verdad última, en cambio las relaciones en el mundo ideal son inmutables y establecen verdades absolutas, que son el verdadero objeto del estudio del filósofo. La auténtica realidad es la idealización perfecta del mundo físico, el mundo de las ideas o de las formas, que es permanente, eterno, intemporal, incorruptible, inmaterial y universal, mientras que el propio mundo físico es una realización imperfecta del mundo ideal y como tal está sujeto a degradación. Por eso, sólo el mundo ideal merece ser estudiado para obtener un conocimiento infalible de las puras formas inteligibles. El mundo ideal es el de las ideas eternas que descubre la inteligencia humana, el mundo físico es el de las opiniones efímeras que crean las sensaciones ficticias y fugaces experimentadas por los sentidos.

La teoría platónica de las ideas o de las formas, el llamado idealismo platónico, sin duda la doctrina más famosa de Platón y la que mayor influencia la ejercido en la historia de la filosofía, explica, por una parte, el camino a seguir para alcanzar el conocimiento, y por otra, cómo las cosas han llegado a ser lo que son.

Es precisamente en el ámbito matemático en el que mejor se puede explicar la teoría de las ideas y en ello reside el hecho de que se llame también teoría de las formas. Un círculo, por ejemplo, se define en geometría como una figura plana compuesta por puntos que equidistan de uno dado. Pero nadie ha visto en realidad esa figura ni se podrá ver jamás. La forma circular de que hablan los geómetras no se encuentra entre los objetos sensibles. Lo que vemos con frecuencia son objetos materiales –por ejemplo, un plato, una rueda, la luna llena o las ondas en el agua– que también llamamos círculos y que resultan ser, en la forma, aproximaciones más o menos acertadas o parecidas al círculo ideal. Cuando los geómetras definen un círculo, los puntos que se mencionan no ocupan espacio, no son entidades físicas espaciales, sino abstracciones lógicas.

Sin embargo, aunque la forma de un círculo no se ha visto nunca, los matemáticos sí saben lo que es. Para Platón, por lo tanto, la forma de círculo existe no en el mundo físico del espacio y del tiempo sino en el ámbito de las ideas, como un objeto inmutable e intemporal que sólo puede ser conocido mediante la razón.



Platón. Museo Pio Clementino. Vaticano.

Lo dicho para el circulo vale idénticamente para cualquier figura geométrica como la línea recta o un segmento, y para todo polígono –triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono... – o para los diversos cuerpos estereométricos –esfera, cilindro, cono, prisma, pirámide... De no existir más que los objetos sensibles, la geometría y las matemáticas, al no tener objeto, no tendrían razón de ser estudiadas. Pero precisamente las matemáticas es el más seguro y verdadero de los saberes, por tanto ha de tener objeto, el más real de los objetos. De modo que por necesidad han de existir objetos que correspondan de forma exacta a las definiciones de los geómetras, es decir, se debe postular la existencia de las formas perfectas de círculo y demás figuras. Pero estas formas no son sensibles, ya que no las percibimos nunca, sino que son inteligibles y tienen el carácter que Parménides atribuía a lo realmente existente.

La teoría platónica de las ideas tiene su origen en las formas geométricas pero no se limita a ellas. Es más, la pretensión de Platón es alcanzar en su doctrina idealista a todo el campo de la Moral, de donde surge el origen matemático de muchos aspectos de la filosofía platónica. Si en nuestro mundo no percibimos nada que sea absolutamente circular, de igual modo tampoco hallamos nada absolutamente bueno o justo. Y si la objetividad de la geometría obliga a postular la existencia de la forma perfecta de círculo inteligible, separada del objeto circular sensible que se aproxima o se

parece a la forma ideal, así también la necesidad de salvaguardar la objetividad de la Moral obliga a postular la existencia de las formas ideales y perfectas del bien y de la justicia, separadas de las personas e instituciones terrenales que deben aproximarse a ellas; deben participar de ellas en la mayor medida posible que siempre será imperfecta.

Las ideas o formas tienen mayor entidad que los objetos en el mundo físico tanto por su perfección, eternidad e inmutabilidad, como por el hecho de ser modelos canónicos que conceden a los objetos físicos lo que tienen de realidad. Por lo tanto, cada cosa en el mundo del espacio y el tiempo es lo que es en virtud de su parecido con su idea universal. Las ideas o formas platónicas son *paradigmas* de las que las cosas sensibles son imitaciones. Las formas geométricas circular, cuadrada y triangular, etc., son excelentes ejemplos de lo que Platón entiende por idea. Un objeto que podemos contemplar en el mundo físico puede ser llamado círculo, cuadrado o triángulo porque imita, se parece (*participa de* en palabras de Platón) a la idea de círculo, cuadrado o triángulo. La cosa "*participa*" de la idea y, por esa "*participación*", es semejante a ella; la idea es, pues, una realidad superior presente en la cosa y al mismo tiempo original o arquetipo.

Como en otras muchas ocasiones es Aristóteles (*Metafísica*, I.6, 987c) quien nos aclara algunas cuestiones en relación con la *Teoría platónica de las ideas* y su relación con las concepciones pitagóricas:

> *"Platón, aprobando la manera de pensar de Sócrates en su búsqueda primaria de lo general, pensó que las definiciones debían recaer sobre toda clase de seres que no fuesen sensibles ya que siempre están en mutación. Y así llamó ideas a estos seres; todas las cosas sensibles quedaban fuera de ellas y recibían en ellas sus nombres, porque gracias a su participación de las ideas, los objetos de un mismo género*

recibían así un mismo nombre. Al hablar de participación tan sólo cambió un nombre. Porque los pitagóricos dicen que los seres son imitaciones de los números o existen por imitación de los números; Platón, cambiando el nombre, dice que son por participación de la idea."

El idealismo platónico, desarrollado como el pitagorismo, en una comunidad de intereses intelectuales –la Academia de Atenas–, es el principal heredero del panmatematismo pitagórico y por consiguiente es también una filosofía de raíces matemáticas. Así lo reconoce Aristóteles al comienzo del capítulo I.6 de la *Metafísica*:

"*La filosofía de Platón sigue, en la mayoría de las cosas, la de los pitagóricos.*"

De hecho el panmatematismo y el idealismo se refuerzan mutuamente, ya que cuanto más se matematiza la realidad, más se la transfiere, en cierto sentido, a un plano ideal, y recíprocamente el filósofo que intente alcanzar la genuina esencia de la naturaleza en un mundo ideal, recibirá de las matemáticas un apoyo fundamental. Pero los pitagóricos ponían en el mismo plano la realidad numérica y la realidad natural, es decir, para ellos los números son los elementos de los que están constituidos los seres sensibles (Aristóteles, *Metafísica*, XIV.3, 1090b):

"*Los pitagóricos, al ver que muchas de las propiedades de los números se daban también en los seres sensibles, concibieron que los números eran los seres; pero no como sustancias separadas, sino como elementos de los que los seres estaban constituidos ¿Por qué razón? Porque las propiedades de los números se hallan en la música, en el cielo y en otras muchas cosas.*"

Para Platón, en cambio, la ciencia de los números no se aplica sobre las cosas sensibles en sí mismas sino sobre los caracteres de las cosas, ya que, según Aristóteles (*Metafísica*, I.6, 987b):

"Además de los seres sensibles y las ideas, admite Platón las especies o ideas matemáticas como ideas intermedias, distintas realmente de los seres sensibles perpetuamente mu-

Las fuentes de Platón

Las fuentes de la teoría platónica de las ideas provienen de una convergencia y una síntesis muy coherente de las doctrinas pitagóricas sobre la estructura matemática del cosmos, de las concepciones de Parménides acerca de la rigurosa distinción entre lo inteligible y lo sensible y, finalmente, de la preocupación socrática por la definición y el concepto, verdadero antecedente de la idea y la forma platónica.

De Parménides, Platón adoptó la distinción radical entre la realidad y la apariencia, la creencia en la eternidad e intemporalidad de la realidad y la idea de que todo cambio es una mera ilusión. También que el conocimiento no puede derivarse de los sentidos sino de forma exclusiva a través del intelecto, de la familiaridad con las ideas que es la única y verdadera realidad no engañosa. J. Itard escribe sobre Platón en la enciclopédica obra Historia general de las ciencias, *compilada por R. Taton (Orbis, Barcelona, 1988, vol.1, Lib. 2, cap. 1, pág.344):*

"Platón, heredero de la tradición pitagórica, mostró claramente su predilección por las ciencias exactas, cuyo objeto depende de lo inteligible más que de lo sensible [Parménides], y en las cuales desempeña un papel preponderante el razonamiento puro".

De su maestro inmediato, Sócrates, Platón aprendió a meditar sobre cuestiones éticas, a buscar explicaciones del mundo más teleológicas que mecánicas y, sobre todo, la concepción de la sa-

dables y distintas de las ideas puras, porque muchas de ellas son entre sí semejantes, mientras que la idea pura es cada una única en su especie."

biduría como conocimiento del bien, elemento básico de la actitud filosófica imprescindible para desarrollar las aptitudes que requiere el ejercicio del buen gobierno.



Pitágoras, Parménides y Sócrates (fragmento de la *Escuela de Atenas* de Rafael. Estancia de la Signatura. Vaticano). Pitágoras está escribiendo en un grueso volumen la doctrina alusiva al fundamento aritmético de la armonía musical, Parménides está señalando a un libro abierto apoyado en la rodilla y Sócrates, en animada plática con sus discípulos, enumera con los dedos las cuatro etapas del Quadrivium —aritmética, geometría, música y astronomía— preliminares para el acceso a la filosofía.

La relación entre los números y las cosas es, pues, de inmanencia en el pitagorismo y de trascendencia en el platonismo. En éste, por encima de los seres sensibles están las ideas matemáticas, y más allá de éstas se sitúan las ideas superiores que son realidades autónomas ubicadas en un plano más elevado de verdad o de existencia del que procede la *participación* o presencia de la idea en el objeto, es decir, la *imitación* en sentido pitagórico de la idea por el objeto.

De estas cuestiones escribe Platón en diversos *Diálogos* como *El Filebo* (25a), *La República* (476a-476d) donde insiste de forma imperativa en no tomar las cosas participantes de una idea por la propia idea de que participan; y con gran claridad lo hace en *El Fedón* (100a):

> *[...] Si existe otra cosa bella aparte de lo bello en sí, no es bella por ninguna otra causa, sino por el hecho de que participa de lo que es bello en sí. [...] No la hace bella más que la presencia o participación de aquella belleza en sí. [...] Es por la belleza por lo que todas las cosas bellas son bellas.*

Continúa Platón en el *Fedón* aduciendo que es por la grandeza que las cosas son grandes, por la pequeñez que las cosas son pequeñas, es decir, que mayor o menor se es por el tamaño, no por las cosas en sí (102a):

> *Simmias es más grande que Sócrates, pero más pequeño que Fedón; así pues, en Simmias se dan ambas cosas: la grandeza y la pequeñez.*

Y sobre asuntos aritméticos escribe (101c):

> *[...] Cuando se agrega una unidad a una unidad es la adición la causa de que se produzcan dos. [...] Desconoces otro modo de producirse cada cosa que no sea la participación en la esencia propia de todo aquello en lo que participe; y que en este caso particular no puedes señalar otra causa de la producción de dos que la participación en la dualidad; y que es necesario que en ella participen las cosas que hayan de ser dos [...].*

4 Pitagorismo y platonismo

"Platón era lo suficientemente pitagórico para creer que sin matemáticas no era posible una verdadera sabiduría".

B. Russell. *Historia de la filosofía occidental*
(Austral, 1995, vol. 1, pág. 144)

Ya hemos señalado que las doctrinas pitagóricas son una de las fuentes principales de la filosofía platónica. La comunidad pitagórica estableció una cosmovisión en la que toda la naturaleza estaba regida por un orden matemático que respondía al término *cosmos* en la descripción de un Universo armonioso y ordenado por unas leyes cognoscibles e inteligibles por el hombre a través del número, que como *esencia de todas las cosas* era el principio generador en el macrocosmos y el microcosmos. Para Pitágoras, filosofía, ciencia, matemáticas, cosmología, música y religión son actividades a las que el número confiere una unidad que las convierte en aspectos indisociables de una forma de vida, en una congregación religiosa iluminada por un entusiasmo místico que desarrolla una pasión por el conocimiento mediante la especulación filosófica y

matemática como ocupaciones esenciales de la cotidianidad. El pitagorismo desarrolló un potente movimiento cultural que llegó a ser mucho más que una escuela de pensamiento, fue un auténtico estilo de vida: *el modo de vida pitagórico* del que hablará Platón en *La República* (Libro X, 600b):

> *Pitágoras constituyó en vida un guía didáctico para aquellos que le amaban por su conversación, [...] legando a la posteridad un método de vida, [...] dejando discípulos que aún hoy parecen distinguirse entre los demás hombres por un género de vida que llaman pitagórico.*

El matemático, y ensayista de éxito de los años 20 del siglo pasado, O. Spengler, sintetiza la filosofía pitagórica del número en el capítulo I , "El sentido de los números" de su famosa obra *La decadencia de Occidente* (Austral, Madrid, 1998), con estas elocuentes palabras:

> "*En el número, como signo de la total limitación extensiva, reside, como lo comprendió Pitágoras, con la íntima certidumbre de una sublime intuición religiosa, la esencia de todo lo real, esto es, de lo producido, de lo conocido y, al mismo tiempo, limitado*" (pág. 138).

> "*La afirmación pitagórica de que el número es la esencia de todas las cosas aprehensibles por los sentidos sigue siendo la más valiosa proposición de la matemática antigua, expresión de un apasionado sentimiento cósmico*" (pág. 148).

La desaparición de la escuela pitagórica produjo una cierta diáspora de sus miembros hacia la región griega del Ática que compondría el germen de la futura Academia platónica, fundada según el modelo de las sedes pitagóricas de la Magna Grecia de las cuales inicialmente se siente heredera.

La famosa inscripción del umbral de la entrada de La Academia platónica: "*No entre nadie ignorante en geometría*", tiene un

posible origen pitagórico, como actitud reverencial de Platón hacia las matemáticas procedente de sus contactos con los pitagóricos Arquitas de Tarento y Teodoro de Cirene. A través de ellos, Platón extrajo de Pitágoras la tendencia religiosa –que gracias a las matemáticas desarrolla una religión racionalista frente a la primitiva religión apocalíptica–, incluidos los aspectos órficos vinculados a la música y al número, la creencia en la inmortalidad, su inclinación a mezclar lo intelectual con el misticismo, y en general la visión panmatemática del mundo con énfasis sobre todo en la geometría. Por eso, continúa el texto de O. Spengler en estos términos (pág. 160):

> "*Tanto Platón como Pitágoras –almas de temple religioso– tuvieron clara conciencia de que por medio de los números habían logrado penetrar en la esencia de un orden divino del Universo*".

Al respecto de lo mismo, escribe también el filósofo y matemático B. Russell en su obra *Los principios de las matemáticas* (Espasa-Calpe, Madrid, 1977, pág. 12):

> "*Las doctrinas de Pitágoras, que comenzaron con el misticismo aritmético, influyeron sobre toda la filosofía y matemática siguiente con mayor profundidad de lo que generalmente se cree. Los números eran inmutables y eternos, como los astros celestes; los números eran inteligibles: la ciencia de los números era la llave del Universo*".

En torno a la decisiva e inmediata influencia del pitagorismo sobre el platonismo, también escribe B. Russell en su obra *Historia de la filosofía occidental* –donde realiza un estudio crítico de la trascendencia de las matemáticas en la filosofía de Platón– (Austral, 1995, vol. 1):

> "*Platón encontró la fuente principal de su inspiración en la filosofía pitagórica*" (pág. 69).

"*Lo que aparece como platonismo resulta, después de analizarlo, esencialmente pitagorismo*" (pág. 75).

"*En la filosofía de Platón existe la misma fusión de intelecto y de misticismo que en el pitagorismo*" (pág. 162).

"*Platón, bajo la influencia de los pitagóricos, asimiló en demasía otros conocimientos a las matemáticas*" (pág. 193).

Platón va todavía más lejos que Pitágoras en cuanto a las atribuciones y funciones de las matemáticas. Según M. Kline (*Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI. Madrid, 1985. Cap. 1, pág. 17):

"*Platón insistía en que la realidad y la inteligibilidad del mundo físico sólo podrían ser aprehendidas por medio de las matemáticas del mundo ideal.* [...] *Platón fue más allá de los pitagóricos por el hecho de que deseaba no solamente comprender la naturaleza por medio de las matemáticas, sino sustituir a la naturaleza misma por las matemáticas*. [...] *Las matemáticas sustituirían a las investigaciones físicas".*

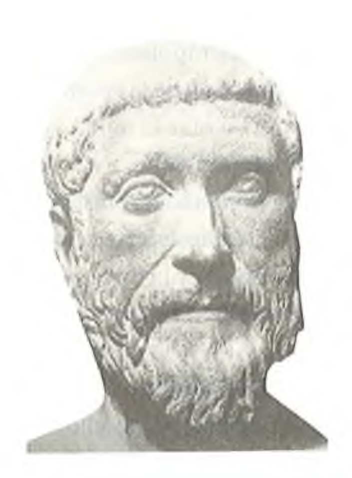
Uno de los rasgos comunes, o más bien heredados, entre pitagorismo y platonismo es, como hemos ido viendo en las citas aludidas, la visión mística de la función que ejercen las matemáticas en ambos sistemas filosóficos, con su tendencia a mezclar –como dice B. Russell– intelecto y misticismo. Tanto para Pitágoras como para Platón el conocimiento se encarna de forma paradigmática en las matemáticas, y efectivamente éstas cumplen la misión encomendada inicialmente a la filosofía. Paradójicamente, pudo estar en el origen de esta concepción precisamente la función subalterna –según los griegos– de las matemáticas como herramienta fundamental del entorno social y cotidiano, y sobre todo del entorno natural, como instrumento básico de intelección y descripción de los fenómenos de la naturaleza. Así lo explica Erwin Schrödinger (*La naturaleza y los griegos*, Tusquets, Barcelona, 1997, pág. 59):

"La esencia del pensamiento matemático es abstraer números del soporte material para operar con ellos y sus relaciones. Por la naturaleza de tal procedimiento, las relaciones, modelos, fórmulas y figuras geométricas a las que se llega por esta vía muy a menudo resultan inesperadamente aplicables a entidades materiales muy diferentes de aquellas de las que fueron abstraídas originariamente. De pronto, la fórmula matemática proporciona orden en un dominio para el cual no estaba previsto y en el que nunca se había pensado cuando se derivó el modelo matemático. Esta experiencia sorprendente es idónea para que surja la creencia en el poder místico de las matemáticas. Al encontrárnoslas de manera inesperada allí donde no las habíamos aplicado, "las matemáticas" parecen hallarse en el fondo de todas las cosas".

No es extraño, como explica Schrödinger, que la ubicuidad de las matemáticas propicie sobre todo en los orígenes de esta ciencia, aunque a veces también en algunas épocas posteriores, cierta mistificación de las mismas. Así ocurrió desde luego en la comunidad pitagórica debido al sorprendente descubrimiento del fundamento aritmético de la armonía musical, de cuya extrapolación a todas las cosas y fenómenos surgiría la férrea inmanencia de las matemáticas con toda la realidad. Otro ejemplo espectacular es el de las cónicas, unas curvas aparecidas en la Academia platónica como mero ejercicio intelectual, que harán posible la revolución astronómica operada por Kepler –en su aplicación de la elipse a las trayectorias de los *movimientos celestiales* de los planetas– y la física de Galileo –en su aplicación de la parábola a las *trayectorias terrestres*.

Hemos señalado dos ejemplos significativos, de origen pitagórico y platónico, pero en una ingente multiplicidad de ellos encontramos el germen de la confianza depositada en las matemáticas como fundamento para cumplir la misión de *dar cuenta o razón* del cosmos global, con atribuciones que en su origen se arrogó a sí misma la filosofía.

Al recoger la herencia filosófica y matemática de Pitágoras, el idealismo platónico refuerza de forma progresiva la matematización de sus fundamentos y lleva hasta el paroxismo la actitud pitagórica de considerar la trascendencia filosófica de las matemáticas, responsabilizando a esta ciencia de realizar los presupuestos de la filosofía –en torno a la explicación racional del Universo– o al menos de constituir un escalón esencial de ascenso hacia la filosofía. Así ocurre, por ejemplo, como veremos, en el *Timeo*, un impresionante mito cosmogónico, fantasía geométrico-cósmica, plagada de misticismo religioso pitagórico en la que Platón delinea el mundo físico y explica los fenómenos naturales en clave geométrica mediante la acción de un dios que, actuando como demiurgo, crea el Universo y lo geometriza según las leyes de las matemáticas. Por cierto, la doctrina del *Timeo* es expuesta por Platón no en labios de Sócrates sino de un astrónomo pitagórico, de nombre Timeo, natural de Lócride, ciudad próxima a Crotona, la primera residencia de Pitágoras en el sur de Italia.





Las imágenes de Pitágoras y Platón en el Museo Capitolino de Roma son quizá los iconos más conocidos de ambos filósofos.

5 La filosofía de las matemáticas de Platón

Los matemáticos se sirven de figuras para sus razonamientos, pero no piensan en ellas, sino en las originales a las que se parecen. [...] Cuando tratan del cuadrado, no tienen en el pensamiento el que dibujan sino el cuadrado absoluto.

Platón. *La República*, 510d-510e.

Con la aparición de la especulación filosófica surgen inmediatamente, entre otras muchas, dos inquietantes preguntas e inmediatos intentos de respuesta: ¿cuál es la naturaleza de las entidades matemáticas, tales como los números y las formas geométricas?, ¿y cuál es su situación en el reino de las cosas?

Como ya se ha dicho, para Pitágoras los entes matemáticos –los números y las formas– eran la materia última de que estaban compuestas las cosas reales de nuestra experiencia sensible. De esta forma, Pitágoras inaugura una preocupación filosófica acerca de la naturaleza de las entidades matemáticas, del lugar que ocupan en los diversos dominios de la realidad y de las relaciones que establecen con los diversos ámbitos del conocimiento, que a partir de

Platón tiene una larga historia y que ha promovido una perenne reflexión ontológica hasta nuestros días tanto en el campo de la filosofía como en el de las matemáticas, y así lo atestiguan algunas frases de relativa actualidad como las palabras del matemático inglés G. H. Hardy en su famosa *Apología de un matemático* (Nivola, Madrid, 1999, pág. 114):

> "*Sobre la naturaleza de la realidad matemática no existe acuerdo tanto entre los matemáticos como entre los filósofos. Algunos mantienen que dicha realidad es mental y que de alguna forma la construimos, otros sostienen que tiene una existencia externa e independiente. Una persona que fuera capaz de dar una explicación convincente de la realidad matemática resolvería los problemas más difíciles de la Metafísica. Si además en su explicación incluyese a la realidad física, resolvería todos ellos*".

O. Spengler escribe, en la obra citada anteriormente, sobre la esencia de las matemáticas en unos términos esencialmente platónicos (pp. 136-137):

> "*Las matemáticas ocupan un puesto peculiar entre todas las creaciones del espíritu. Es una ciencia de estilo riguroso, como la lógica, pero más amplia y mucho más rica de contenido; es un verdadero arte, que puede ponerse al lado de la plástica y de la música, porque, como éstas, ha de menester una inspiración directriz y amplias convenciones formales para su desarrollo; es, por último, una metafísica de primer orden, como lo demuestra Platón, y sobre todo Leibniz. El desarrollo de la filosofía se ha verificado hasta ahora en íntima unión con una matemática correspondiente*".

El intento de fundamentar el saber matemático fue una de las motivaciones platónicas para desarrollar la *teoría de las ideas*, pero, a su vez, el origen matemático de dicha teoría es un aspecto esencial de la importancia decisiva de las matemáticas en la naturaleza

y el desarrollo de la filosofía platónica. En efecto, Las concepciones de Platón acerca de las matemáticas son una parte integral de la naturaleza y desarrollo de la filosofía platónica y, recíprocamente, uno de los aspectos más importantes de la influencia de la filosofía platónica en las matemáticas tiene que ver con su teoría de las ideas o las formas que, como se ha dicho, tiene su origen en el pensamiento pitagórico sobre la estructura matemática del cosmos, aunque también proviene de las concepciones de Parménides sobre lo inteligible y de las diversas doctrinas socráticas.

No se conoce ninguna obra de Platón dedicada exclusivamente a las matemáticas, pero en muchos de sus Diálogos –*Menón*, *Las Leyes*, *Teeteto* y, sobre todo, *La República* y *Timeo*– el filósofo desarrolla multitud de consideraciones extraídas de las matemáticas para establecer la aristocracia intelectual de esta ciencia, a la que según Platón habría que confiar las funciones que forman la base de la acción política del estado. Para Platón, las matemáticas están dotadas de un carácter de necesidad divina, lo que sintetiza en la máxima *Dios siempre hace geometría*, frase atribuida a Platón por Plutarco en *Quaestiones Convivium* (VIII.2), como respuesta a la pregunta de uno de sus discípulos: *¿qué hace dios*?

Platón geometriza toda la realidad, pero no sólo la realidad física sino también la esfera espiritual –lo moral, lo estético, lo político...– en un ambicioso proyecto que quiere abarcar la globalidad de la naturaleza física y del ser humano, de modo que para Platón las estructuras matemáticas gobiernan no sólo *la naturaleza del alma humana*, sino también *la naturaleza del alma del mundo* (*Timeo*, 34b-36d). En Platón la geometría se convierte en un instrumento heurístico medular de toda su obra que recoge el pálpito y el sentir de toda la cultura griega, donde, según su filosofía no debe haber aspecto, ya sea ético, político o científico, que no se apoye en lo geométrico.

Para Platón, las matemáticas no son sólo una realidad perfecta sino la auténtica realidad de la cual el mundo físico es un simple



Platón. Parque de Lezama, Buenos Aires.

reflejo imperfecto. Las ideas matemáticas ocupan un estrato intermedio entre el mundo sensible y el mundo inteligible de las ideas superiores –la bondad, la belleza, la justicia– que alcanzará el filósofo gracias al conocimiento previo de las ciencias matemáticas. De esta forma, estas disciplinas matemáticas adquieren una categoría filosófica con una dimensión ética, estética y política, ya que, tal y como se prescribe en el Libro VII de *La República* de Platón, son una propedéutica imprescindible para ascender hacia la filosofía.

Por herencia pitagórica, para Platón las matemáticas no son sólo una realidad perfecta sino la auténtica realidad de la cual nuestro

mundo cotidiano no es más que un reflejo imperfecto, una sombra en el sentido del *mito de la caverna* del diálogo *La República* (Libro VII, 514a-519d). Por tanto los conceptos de las matemáticas son independientes de la experiencia y tienen una realidad propia; se los descubre, no se los inventa o crea. Los juicios geométricos son eternos y apriorísticos, y corresponden a una realidad intemporal e inmutable, que es la auténtica realidad, más real que la engañosa, imperfecta e incompleta realidad sensible.

De acuerdo con su idealismo geométrico, Platón subraya que los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras concretas que dibujamos sino a las ideas absolutas que ellas representan (*La República*, 510d-510e):

> *Los matemáticos se sirven de figuras visibles que dan pie para sus razonamientos, pero en realidad no piensan en ellas, sino en las originales a las que se parecen. Y así, por ejemplo, cuando tratan del cuadrado y de su diagonal, no tienen en el pensamiento el que dibujan sino el cuadrado absoluto y su diagonal. Las mismas cosas que modelan y dibujan, cuyas imágenes nos las ofrecen las sombras y los reflejos del agua son empleadas por ellos con ese carácter de imágenes, pues bien saben que la realidad de esas cosas no podrá ser percibida sino con el pensamiento.*

Por ello, para Platón, las matemáticas deben ser independientes de todo pragmatismo y empirismo y de la utilidad inmediata, y deben estar liberadas intelectualmente de todo instrumento material –que son elementos corruptores y degradantes–, como señala Plutarco en sus *Vidas paralelas* (*Vida de Marcelo*. XIV), cuando nos habla de la indignación de Platón ante el uso de artificios mecánicos en la geometría:

> "*Platón se indispuso e indignó con ellos* [Arquitas de Tarento y Eudoxo de Cnido] *porque degradaban y echaban a perder lo más excelente de la geometría con trasladarla de lo*

incorpóreo e intelectual a lo sensible y emplearla en los cuerpos que son objeto de oficios toscos y manuales".

Platón señala una y otra vez en *La República* que la geometría no debe tener otra finalidad que el conocimiento en sí mismo. Así lo proclama en 527a:

Nadie que se dedique a la geometría, por poca práctica que tenga en ella, pone en duda que esta ciencia es todo lo contrario de lo que supondría la terminología de los geómetras. [...] Dicen muchas cosas que por fuerza resultan ridículas. Pues hablan como si realmente actuasen y como si sus palabras tuviesen tan sólo un fin práctico, adornando su lenguaje de términos como cuadrar, prolongar, adicionar. Y, sin embargo, en verdad toda esta ciencia se cultiva con el único objeto de conocer.

De esta visión platónica idealista podría derivar la distinción que en la Grecia clásica se hizo entre *aritmética* y *geometría* como factores espirituales de elevación hacia la filosofía y *logística* y *geodesia* como instrumentos prácticos y utilitarios de los comerciantes y técnicos. Ambos recursos, geodesia y logística, herramientas de los artesanos, tan útiles y necesarias en la vida cotidiana, eran de rango social e intelectual inferior y subalterno al cultivo de la geometría y la aritmética. Así pues, debido a la influencia de Platón, la geometría permanecería a partir de entonces ligada a un modelo teórico de las matemáticas puras que rechaza sus aplicaciones prácticas y desprecia el estudio de la dimensión sensible de la realidad.

Como consecuencia, a partir de Platón se remacha la consideración de las matemáticas como *ciencia liberal y desinteresada*, independiente de todo pragmatismo empírico y de la utilidad inmediata, liberada intelectualmente de instrumentos materiales. Según Platón, sólo las matemáticas desinteresadas y no utilitarias son dignas de una educación liberal –*ser libre significa ser su propia causa*–. Las matemáticas, según los griegos, deben estudiarse por la afición y el amor al saber en sí mismo, es decir, "*las matemáticas deben*



Primera página de *La República* de Platón (*Plato, De Republica. De graco in latinum....*). Manuscrito en pergamino de 1401. Biblioteca Colombina de Sevilla.

estudiarse por filosofía y para la filosofía". Para Platón la ciencia desinteresada tiene su fin en sí misma y es la actividad intelectual suprema. La Academia platónica hace geometría "*por el mero honor del espíritu humano*", como muchos siglos después sentenciaría Jacobi y la utilidad es un valor añadido. Las matemáticas de los *bárbaros* –los extranjeros–, por muy avanzadas que sean sus civilizaciones, no son *artes* porque no están libres de las coacciones de la necesidad.

Como consecuencia de esta filosofía de la geometría, Platón puede haber sido el responsable de la restricción predominante en las construcciones geométricas griegas a aquellas que pueden realizarse sólo con regla y compás.

La *República* es un texto fundamental para comprender la filosofía de las matemáticas de Platón, que tanta trascendencia ha tenido en la evolución ulterior de esta ciencia. En esta obra, Platón expone una grandiosa concepción ontológica de las matemáticas que ha tenido un singular atractivo sobre los matemáticos de todas las épocas. A través del bellísimo lenguaje metafórico de la *alegoría de la caverna* y de la *alegoría de la línea seccionada*, Platón reflexiona, una y otra vez, acerca de la naturaleza de las entidades matemáticas, del lugar que ocupan en los diversos dominios de la realidad y de las relaciones que establecen con los diversos ámbitos del conocimiento.

6 Las matemáticas como propedéutica de la filosofía

Conferimos a las ciencias matemáticas el poder dialéctico de ascender de la caverna a la luz, de lo visible a lo inteligible, de los sentidos a la esencia, por medio de la inteligencia. Por ellas puede elevarse la mejor parte del alma a la contemplación del mejor de los seres: el bien.

Platón. *La República* (532c).

En *La República*, Platón, en diálogo entre Sócrates y Glaucón, mantiene la tesis fundamental de que los males de los hombres cesarían si fueran los filósofos quienes gobiernen las ciudades. El filósofo debe gobernar porque sólo él posee el verdadero saber, el conocimiento de las ideas, y entre ellas la idea suprema del bien. El filósofo gobernante debe poseer un alma noble y dotada de facilidad para aprender, cualidades que han de ser perfeccionadas por la educación.

Para Platón la belleza y la abstracción de las matemáticas no deben contaminarse con exigencias de orden material, ya que tienen como misión elevar el alma de las cosas sensibles a la verdad ideal

La alegoría de la caverna

"Los que no poseen filosofía puede ser comparados a prisioneros en una cueva que sólo pueden mirar en una dirección, porque están atados, y tienen tras ellos un fuego y enfrente una pared. Entre ellos y la pared no hay nada; todo lo que ven son sus propias sombras o las de los objetos que se hallan detrás de ellos, proyectadas sobre la pared y por la luz del fuego. Inevitablemente, consideran estas sombras como reales y no tienen noción de los objetos a los que pertenecen. Por fin, alguien logra escaparse de la cueva a la luz del Sol; por primera vez ve cosas verdaderas, y se da cuenta de que hasta entonces ha sido engañado por sombras. Si es un filósofo capaz de hacerse guardián, considerará su deber para con aquellos que antes eran sus compañeros de prisión bajar a la cueva y enseñarles la verdad y mostrarles el camino hacia arriba. Pero le será difícil convencerlos, porque proviniendo de la luz del Sol verá menos claras las sombras que ellos, y a éstos les parecerá más insensato que antes de su huida".

En B. Russell, Historia de la filosofía occidental. *Espasa-Calpe (colección Austral). Vol. 1. Madrid, 1995. pág. 161.*

inteligible, cognoscible por vía exclusivamente racional. El mundo sensible en el que se desarrolla nuestra experiencia está construido de apariencias que son copias muy imperfectas de la verdadera realidad. La tarea del filósofo es precisamente la de trascender el mundo sensible para aproximarse progresivamente al ideal puro de la verdad, la belleza y el bien, para inculcar estos valores absolutos en la vida del ciudadano con la finalidad de instaurar y mantener en toda la sociedad una vida moral acorde con la justicia, de ahí el valor político de la función del filósofo. Pero es en el acto del filósofo de

trascender el mundo sensible donde las ciencias matemáticas juegan un papel esencial, ya que permiten realizar una intermediación en el tránsito de lo sensible a lo racional, es decir, del mundo de lo visible con los sentidos al mundo de las ideas con el entendimiento.

La carrera que ha de seguir el filósofo gobernante corresponde a la escala universal de conocimiento, que Platón estableció en tres grados ascendentes de la ciencia (sensible, discursiva y dialéctica) y lo simbolizó en dos alegorías: la *alegoría de la caverna* (514a-519d) y la *alegoría de la línea seccionada* (509d-511e).

En la primera de ellas, la caverna representa el ámbito sensible en que vivimos y el fuego es el sol. Fuera de la caverna está el ámbito inteligible de las ideas, en el que el sol simboliza la idea suprema del bien. El arte de transitar el alma desde las tinieblas a la luz es la formación a través de la educación, que permitirá gobernar al filósofo.

Según Platón, las ciencias matemáticas son el instrumento que permite al verdadero filósofo empezar a romper las cadenas que le tienen aprisionado en la oscuridad del mundo sensible de la caverna e ir alcanzando progresivamente la contemplación de la verdadera realidad del mundo inteligible –las ideas y las formas eternas inmateriales y universales–, cuyo ascenso se inicia comenzando por las formas geométricas, verdadera matriz de las ideas y formas abstractas: la belleza, la justicia, el bien, etc.

Esas ciencias matemáticas son las cuatro artes del *Quadrivium pitagórico*, que Platón hereda del magisterio de Arquitas de Tarento –aritmética, geometría, música y astronomía– cuyo conocimiento permite que el alma se eleve hacia la auténtica verdad propiciando en la mente la actitud filosófica que culmina en la intelección de la suprema idea del bien, que es la verdadera finalidad de la filosofía.

En la *alegoría de la línea,* Platón explica que los objetos sensibles no son más que imitaciones de unas realidades inmutables y

eternas –las ideas– que resultan accesibles sólo a la parte inteligente del alma; pero aquí el mundo sensible y el inteligible (simbolizados en una línea dividida en dos secciones) aparecen divididos cada uno en dos sectores, porque en el mundo sensible están los objetos percibidos directamente por los sentidos y están también las imágenes o apariencias de esos objetos, como son las sombras que producen o los reflejos que proyectan en las aguas o en los espejos y superficies pulidas. Las ideas u objetos inteligibles pueden ser percibidos en toda su realidad cuando se alcanzan por la ciencia suprema de la dialéctica o mediante imágenes y representaciones, como ocurre en las disciplinas matemáticas. Éstas son inferiores a la dialéctica porque no se remontan como ésta a los primeros principios sino que parten de hipótesis, y también porque no se desprenden totalmente de los objetos sensibles. El geómetra que estudia el cuadrado lo hace valiéndose de un cuadrado concreto que dibuja (*La República*, 510d), a través del cual ve con los ojos del entendimiento el cuadrado esencial, objeto real de sus razonamientos y al que aplica sus conclusiones.

La *alegoría de la línea* se entiende mejor mediante un esquema geométrico. Supongamos una recta dividida en dos segmentos desiguales (AB y BC), y cada uno de ellos dividido a su vez en otros dos subsegmentos desiguales (AB dividido en AD y DB; y BC dividido en BE y EC). Según Platón (*La República*, 510a), las divisiones se realizan de modo que la razón entre cada par de subsegmentos sea la misma e idéntica a la razón de los segmentos de la primera división, es decir:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$$

El segmento *AB* representa el mundo visible y el conocimiento que tiene a éste por objeto, mientras el segmento *BC* representa el mundo inteligible y su correspondiente conocimiento. El segmento *BC* es mayor que el segmento *AB* para simbolizar la superioridad del conocimiento inteligible sobre el conocimiento sensible.

Dentro del mundo visible (*AB*), el subsegmento *AD* representa las imágenes en el sentido de sombras o reflejos de los seres naturales y el conocimiento que les corresponde es nombrado por Sócrates como *eikasía*, siendo traducido de muy diversas maneras (conjetura, imaginación...) en las diferentes ediciones de *La República* de Platón; aquí lo llamaremos *figuración* al interpretarlo como reacción de la fantasía a la percepción de las imágenes y las sombras. El subsegmento *DB* representa los objetos materiales reales, sensibles y visibles (animales, plantas y cosas), de los cuales son imágenes los precedentes; siendo el conocimiento que les corresponde la *creencia*, llamada por Sócrates *pistis*, que se identifica con la física, que no es en realidad asimilada a una verdadera ciencia por Platón. El conjunto de ambos conocimientos, AB, es lo que Platón llama habitualmente *opinión* (*doxa*).

Dentro del mundo inteligible, representado por el segmento *BC*, el subsegmento *BE* simboliza lo que Sócrates designa como *hipótesis*, que, por los ejemplos que pone, corresponde a los objetos matemáticos; su conocimiento es la *diánoia*, que habitualmente se traduce por *pensamiento discursivo*. Por último, el subsegmento *EC* corresponde a los *principios*, el mundo de las ideas puras, siendo su conocimiento propio la *nóesis* o *intelección*. El conjunto de ambos conocimientos, *BC*, es lo que Platón llama habitualmente *epistéme*, es decir, la *ciencia*.

El pensamiento discursivo o *diánoia* es el tipo de conocimiento más articulado y corresponde básicamente al razonamiento matemático, aunque se podría, con más generalidad, asimilarlo al método de razonamiento deductivo. El análisis etimológico del

término *diánoia* nos lleva a interpretarlo como el acto intelectual de *discurrir* o *pasar con el pensamiento de una cosa a otra*, o simplemente *pensar*, ya que la raíz o lexema *no* indicaría *percepción profunda* o *comprensión*, mientras que la partícula *dia* denota *movimiento a través de*. Así pues, parece que el término *diánoia* está realmente vinculado con la actividad matemática. De todos modos, Platón establece en *La República* que esta función del pensamiento discursivo tiene tres características esenciales:

a) Da por supuestas determinadas nociones aritméticas y geométricas (diferentes clases de números y figuras) sin remontarse a ningún otro concepto más básico y primario (510c).

b) Se sirve de imágenes de los objetos del mundo sensible (510d) para referirse a conceptos derivados de los supuestos iniciales (cuadrado, triángulo...) para llegar a *conocer las verdaderas figuras esenciales* de la realidad inteligible, que sólo se pueden alcanzar y conocer por el pensamiento.

c) No se preocupa de la validez última de las *hipótesis* de las que arranca el pensamiento discursivo, sino tan sólo de la legitimidad de las conclusiones (510b, 511a).



Platón, por Pedro Berruguete.
Museo del Louvre, París.

La alegoría de la línea

— Toma, pues, una línea que esté cortada en dos segmentos desiguales y vuelve a cortar cada uno de los segmentos, el del género visible y el del inteligible, siguiendo la misma proporción. Entonces tendrás, clasificados según la mayor claridad u oscuridad de cada uno: en el mundo visible, un primer segmento, el de las imágenes. Llamo imágenes ante todo a las sombras y, en segundo lugar, a las figuras que se forman en el agua y en todo lo que es compacto, pulido y brillante y a otras cosas semejantes, si es que me entiendes.

— Sí que te entiendo.

— En el segundo pon aquello de lo cual esto es imagen: los animales que nos rodean, todas las plantas y el género entero de las cosas fabricadas.

— Lo pongo —dijo.

— ¿Accederías acaso —dije yo— a reconocer que lo visible se divide, en proporción a la verdad o a la carencia de ella, de modo que la imagen se halle, con respecto a aquello que imita, en la misma relación en que lo opinado con respecto a lo conocido?

— Desde luego que accedo —dijo.

— Considera, pues, ahora de qué modo hay que dividir el segmento de lo inteligible.

— ¿Cómo?

— De manera que el alma se vea obligada a buscar una de las partes sirviéndose, como de imágenes, de aquellas cosas que antes eran imitadas, partiendo de hipótesis y encaminándose así, no hacia el principio, sino hacia la conclusión; y la segunda, partiendo también de una hipótesis, pero para llegar a un principio no hipotético y llevando a cabo su investigación con la sola ayuda de las ideas tomadas en sí mismas y sin valerse de las imágenes a que en la búsqueda de aquello recurría.

>>

— No he comprendido de modo suficiente —dijo— eso de que hablas.

— Pues lo diré otra vez —contesté— . Y lo entenderás mejor después del siguiente preámbulo. Creo que sabes que quienes se ocupan de geometría, aritmética y otros estudios similares dan por supuestos los números impares y pares, las figuras, tres clases de ángulos y otras cosas emparentadas con éstas y distintas en cada caso; las adoptan como hipótesis, procediendo igual que si las conocieran, y no se creen ya en el deber de dar ninguna explicación ni a sí mismos ni a los demás con respecto a lo que consideran como evidente para todos, y de ahí es de donde parten las sucesivas y consecuentes deducciones que les llevan finalmente a aquello cuya investigación se proponían.

— Sé perfectamente todo eso —dijo.

— ¿Y no sabes también que se sirven de figuras visibles que dan pie para sus razonamientos, pero en realidad no piensan en ellas, sino en aquellas cosas a las que se parecen? Y así, por ejemplo, cuando tratan del cuadrado en sí y de su diagonal, no tienen en el pensamiento el que dibujan y otras cosas por el estilo. Las mismas cosas que modelan y dibujan, cuyas imágenes nos las ofrecen las sombras y los reflejos del agua son empleadas por ellos con ese carácter de imágenes, pues bien saben que la realidad de esas cosas no podrá ser percibida sino con el pensamiento

— Tienes razón —dijo.

XXI. –Y así, de esta clase de objetos decía yo que era inteligible, pero que en su investigación se ve el alma obligada a servirse de hipótesis y, como no puede remontarse por encima de éstas, no se encamina al principio, sino que usa como imágenes aquellos mismos objetos, imitados a su vez por los de abajo, que, por comparación con éstos, son también ellos estimados y honrados como cosas palpables.

–Ya comprendo –dijo–; te refieres a lo que se hace en geometría y en las ciencias afines a ella.

–Pues bien, aprende ahora que sitúo en el segundo segmento de la región inteligible aquello a que alcanza por sí misma la razón valiéndose del poder dialéctico y considerando las hipótesis no como principios, sino como verdaderas hipótesis, es decir, peldaños y trampolines que la eleven hasta lo no hipotético, hasta el principio de todo; y una vez haya llegado a éste, irá pasando de una a otra de las deducciones que de él dependen hasta que de ese modo descienda a la conclusión sin recurrir en absoluto a nada sensible, antes bien, usando solamente de las ideas tomadas en sí mismas, pasando de una a otra y terminando en las ideas.

–Ya me doy cuenta –dijo–, aunque no perfectamente, pues me parece muy grande la empresa a que te refieres, de que lo que intentas es dejar sentado que es más clara la visión del ser y de lo inteligible que proporciona la ciencia dialéctica que la que proporcionan las llamadas artes, a las cuales sirven de principios las hipótesis; pues, aunque quienes las estudian se ven obligados a contemplar los objetos por medio del pensamiento y no de los sentidos, sin embargo, como no investigan remontándose al principio, sino partiendo de hipótesis, por eso te parece a ti que no adquieren conocimiento de esos objetos que son, empero, inteligibles cuando están en relación con un principio. Y creo también que a la operación de los geómetras y similares la llamas pensamiento discursivo, pero no conocimiento, porque el pensamiento es algo que está entre la simple opinión y el conocimiento.

–Lo has entendido –dije– con toda perfección. Ahora aplícame a los cuatro segmentos estas cuatro operaciones que realiza el alma: la inteligencia, al más elevado; el pensamiento discursivo, al segundo; al tercero dale la creencia y al último la figuración; y ponlos en orden, considerando que cada uno de ellos participa tanto más de la claridad cuanto más participen de la verdad los objetos a que se aplica.

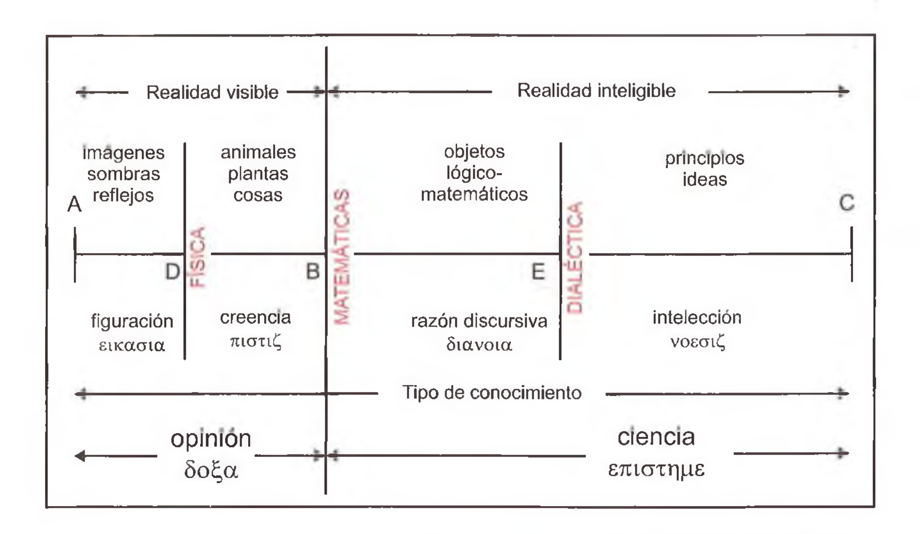
–Ya lo comprendo –dijo–; estoy de acuerdo y los ordeno como dices.

Platón, La República *(509d–511e)*

Según Platón, la *intelección* es una operación del alma que procede de forma inversa al *pensamiento discursivo*, a base de aprehender los objetos inteligibles sin recurrir a lo sensible, pasando simplemente de idea en idea, partiendo también de hipótesis, pero ascendiendo desde ellas a principios absolutos independientes de cualquier concepto anterior, en un proceso retroactivo que Platón llama dialéctica.

La *alegoría de la línea* acaba, al final del Libro VI de *La República* (511e), estableciendo de forma encadenada la gradación sucesiva de los cuatro niveles de conocimiento descritos en progresivo ascenso hacia la verdad absoluta, que en última instancia recibe su fundamento de la suprema idea de bien.

La aplicación literal de la *alegoría de la línea* presenta una circunstancia de carácter geométrico que no es contemplada por Platón.



Esquema gráfico de la *alegoría de la línea* de *La República* de Platón



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$$

La propia Academia platónica desarrolla la *teoría de la proporción* como solución a la crisis de los inconmensurables. Una de las propiedades sencillas de las proporciones, que pasará a los *Elementos* de Euclides como Proposición V.18, establece:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces se verifica: } \begin{cases} \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \\ \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d} \end{cases}$$

Aplicando estas propiedades a las proporciones de la *alegoría de la línea* se tiene:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{BC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{DB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BE}+\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}+\overline{BC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Resulta, pues, que $\overline{DB} = \overline{BE}$, que habría que interpretar como que el grado de exactitud de la *creencia* es idéntico al del *pen-*

samiento discursivo, lo que, de alguna forma contradice un planteamiento filosófico de Platón, para quien cualquier forma de conocimiento intelectual es superior a cualquier modo de conocimiento sensorial.

Hay un cierto paralelismo entre la *alegoría de la línea* y la *alegoría de la caverna*. De hecho las cuatro fases de la ascensión desde el mundo de las sombras al mundo de la luz de la segunda alegoría se corresponden con los cuatro segmentos de la primera, de la siguiente forma:

Alegoría de la caverna	⟷	***Alegoría de la línea***
Visión de las sombras de la caverna	⟷	Figuración
Visión de los objetos de la caverna	⟷	Creencia
Visión de las sombras del exterior	⟷	Pensamiento discursivo
Visión de los objetos del exterior	⟷	Intelección

Según la *alegoría de la línea* de *La República* de Platón el mundo está dividido en dos realidades: el mundo aparente formado por los objetos materiales y el mundo inteligible formado por los objetos matemáticos, las formas o ideas y el supremo bien. Los objetos matemáticos sirven para Platón como puente para transportar la mente humana del mundo aparente del no ser al mundo ideal e inteligible del ser. El proceso para llegar al conocimiento va desde la captación de las imágenes sensibles (figuración), a la percepción de los objetos (creencia), a través de los objetos matemáticos (*diánoia*) hasta la intuición y contemplación de las ideas (*nóesis*) que constituyen el verdadero conocimiento supremo de la dialéctica.

El mundo inteligible representa el conocimiento intelectual, o conocimiento del mundo de las ideas, esto es, la belleza en sí, la justicia en sí... y en la cima de todas las ideas está el bien en sí. Es propio de la mente instruida del filósofo, proporciona ciencia (epistéme) y tiene dos niveles:



La dialéctica.
Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P. Tibaldi. 1586.

a) El pensamiento discursivo de las matemáticas (*diánoia*) o conocimiento que se obtiene cuando se razona y se va de las hipótesis a las conclusiones que de ellas se deducen. En este mundo se encuentran las formas de los números y las formas geométricas. Corresponde, en la *alegoría de la caverna*, al conocimiento que los liberados de la cueva tienen de los objetos mismos. Pero las matemáticas no son la ciencia más perfecta porque necesitan utilizar ejemplos o imágenes sensibles para sus demostraciones. Cuando el geómetra hace sus demostraciones, se tiene que conformar

con una representación material y, por tanto, inexacta de las distintas figuras geométricas. Sabe que el cuadrado o el círculo no son más que copias o imágenes del cuadrado en sí o del círculo en sí. Además, las demostraciones de las matemáticas se realizan a partir de hipótesis, de supuestos, pero no se pregunta por su validez, sino que se presupone.

b) El pensamiento intelectivo que por ser conocimiento intuitivo de las ideas, es superior a las matemáticas y no es otro que la dialéctica. Gracias a ella nuestra razón es capaz de utilizar las hipótesis de las otras ciencias inferiores (las matemáticas) como trampolines hasta alcanzar el principio de todo, la verdad suprema. Este principio que es capaz de explicar todo, no puede ser hipotético. Se trata del principio primero de la naturaleza y de la existencia. Es la idea de bien.

7 El *Quadrivium*

Con estas ciencias [las ciencias matemáticas: aritmética, geometría, música y astronomía] *se purifica y reaviva el órgano del alma de cada uno, extinguido y cegado por todas las demás actividades. [...] Cuidemos de que aquellos a los que hemos de instruir no se apliquen a un estudio imperfecto de estas ciencias.*

Platón. *La República* (527e, 531b).

De acuerdo con los principios apuntados acerca del carácter preliminar de las artes matemáticas como introducción a la filosofía, Platón construye un auténtico plan de estudios matemáticos (*La República*, Libro VII, 525a-534a) que resulta ser el origen del *Quadrivium pitagórico* medieval, que comprende la aritmética, la geometría, la astronomía y la armonía musical; disciplinas que junto a la estereometría –o geometría de los sólidos– deben constituir un programa de instrucción necesario, ya que el aprovechamiento en cada una de ellas es imprescindible para llegar, por fin, a la cumbre de la dialéctica.

Ya antes de la *alegoría de la línea* y de la *alegoría de la caverna*, Platón había sentenciado respecto de los filósofos gobernantes (503e):

> *[...] Deberán adiestrarse en otras muchas ciencias, único medio de que observemos si son capaces de soportar los estudios más profundos, [...]*

Poco después del *mito de la caverna*, Platón concreta las ciencias que deben formar parte de los estudios esenciales e ineludibles del filósofo en su formación como gobernante, pero antes de referirse específicamente a las cuatro ciencias del *Quadrivium* habla de la diferencia entre la aritmética y la logística, ponderando la necesidad de ambas (525a-525b):

> *No cabe duda de que el arte de calcular* [la logística] *y la aritmética se ocupan por entero del número. [...] Una y otra, pues, parece que conducen hacia la verdad. [...] He aquí, según parece, que tenemos ya dos de los estudios que buscamos. Ambas son necesarias de todo punto al guerrero y al filósofo, al primero para la mejor ordenación de los ejércitos, y al segundo para que emerja del mundo perecedero hacia la esencia de las cosas, si es que se precia de hombre calculador.*

Tan importante considera Platón el adiestramiento en el arte de calcular y en la aritmética que indica que se deben imponer en la instrucción por imperativo legal (525b-525d):

> *[...] Convendrá imponer esta enseñanza por medio de una ley y convencer a los que deban ocupar los puestos de gobierno de la ciudad para que desarrollen su gusto por el arte de calcular, pero no de una manera superficial, sino hasta alcanzar la contemplación de la naturaleza de los números sirviéndose de la inteligencia. Porque aquella no es de uso exclusivo de los comerciantes y mercaderes, ni se ciñe tan sólo a las compras y a las ventas, sino que puede aplicarse a la guerra y a facilitar una vuelta del alma misma al mundo de la verdad y de la esencia. [...] Después de lo*

dicho sobre la ciencia del cálculo, pienso en lo excelente y útil que resulta en muchos aspectos para el fin que perseguimos. Pero se trata de utilizarla para adquirir conocimiento y no para traficar con ella.

Platón describe ahora, con su inveterado idealismo, la misión de la aritmética como ciencia para escapar del ámbito del devenir y la generación y elevar el alma para discurrir sobre los números en sí (525d-526c):

[...] Es lo cierto que esa ciencia [la aritmética] conduce el alma hacia lo alto y la obliga a razonar sobre los números, sin permitir de ningún modo



El *Quadrivium* pitagórico-platónico.

Fragmento del códice de Nicolo da Bologna *Las virtudes y las artes*, de 1355. Biblioteca Ambrosiana de Milán. Como herencia del mundo platónico, las cuatro artes liberales del *Quadrivium* se representan de manera alegórica en forma de figuras de elegantes y refinadas damas en cuya indumentaria aparecen en cada una de ellas atributos e instrumentos matemáticos distintivos de las diversas ciencias. Las damas son como musas de los sabios matemáticos que las acompañan. En este icono la aritmética infunde la sabiduría a Pitágoras, la geometría a Euclides, la música a Tubalcaín y la astronomía a Ptolomeo.





Alegorías de la filosofía y la aritmética.

Tapices de la iglesia gótica de Santo Domingo de Castrojeriz (Burgos). Se hicieron en talleres de la ciudad de Brujas hacia 1654.

En el icono de la filosofía coexisten, en el tiempo y en el espacio, los tres grandes filósofos griegos: Sócrates, Platón y Aristóteles, que escuchan atentamente las enseñanzas de la diosa filosofía.

En el icono de la aritmética se representa a esta ciencia en actitud displicente, indiferente o de desagrado ante la operación comercial entre vendedor y comprador. Parece que la aritmética quiere eludir el arbitraje de la mercadería por no asumirlo como función suya, según la visión platónica sobre esta ciencia en *La República*.

que nadie presente un ejemplo de números corpóreos y tangibles. [...] Esa ciencia se nos presenta con visos de necesaria, puesto que parece forzar al alma a servirse de la inteligencia pura para alcanzar la verdad en sí.

[...] Los hombres calculadores por naturaleza manifiestan notable facilidad para todas las ciencias, [...] y los espíritus torpes, si son educados y ejercitados en aquel conocimiento, obtienen de él, una mayor agudeza de la que antes carecían, [...] sin embargo, pocas ciencias hay que ofrezcan más dificultades al que trata de aprenderla y ejercitarse en ella. [...] Queda, pues adoptada como la primera de las ciencias.

A la aritmética le sigue en importancia la geometría plana, a la que alude Platón como instrumento en el arte de la guerra (526d):

Interesa la geometría en cuanto tiene relación con los asuntos de la guerra. Mucho diferirá el geómetra del que no lo es al disponer los campamentos de un ejército, o la toma de posiciones, o las concentraciones, o los despliegues de hombres, o cualesquiera otras maniobras que realicen las tropas en el campo de batalla o en una simple marcha [...].

Pero muy por encima de su valor utilitario, la geometría se dirige al conocimiento de lo que siempre es (526e):

[...] Pero lo que sin duda debemos examinar es si la parte mayor y más elevada de esta ciencia nos conduce a lo que antes decíamos; es decir, a una contemplación más factible de la idea del bien. Conducen a ella todas aquellas cosas que fuerzan al alma a volverse hacia el lugar en el que se encuentra lo más feliz de cuanto es, y a donde conviene que mire de todos los modos posibles. [...] La geometría nos obliga a contemplar la esencia [...]

A continuación, Platón insiste en su visión idealista de la geometría como factor espiritual de elevación hacia la filosofía (527b):

La geometría es una ciencia del conocimiento del ser, no de lo que está sujeto al cambio o desaparición. [...] La geometría es una ciencia de lo que siempre

es. [...] Conducirá al alma hacia la verdad y dispondrá la mente del filósofo para que eleve su mirada hacia arriba en vez de dirigirla a las cosas de abajo, que ahora contemplamos sin deber hacerlo.

Por todas estas razones y por su importancia para el estudio de las demás ciencias, Platón prescribe el estudio de la geometría (527c):

[...] Habrá que propiciar que no se desdeñe el estudio de la geometría, porque no son pequeñas las ventajas que otorga. [...] Además de las referentes a la guerra, aquellas que facilitan en mayor grado el estudio de todas las ciencias, ya que bien sabemos que existe una diferencia radical entre quien se ha dedicado a la geometría y quien no. [...] Admitiremos pues que sea la segunda ciencia de nuestros jóvenes.

La siguiente ciencia a estudiar debe ser la geometría del espacio, que Aristóteles llamará estereometría (*Analítica posterior, Libro* I, Cap. 13, 78b), aunque también aparece este nombre en el diálogo platónico *Epinomis* (991b), de dudosa autenticidad. Platón se queja, en *La República*, de que su estudio ha sido hasta el momento muy débil, de modo que debería ser promocionado por el estado (528b):

[...] Siguiendo un orden gradual, después de la segunda dimensión se debería tratar la tercera, es decir, lo que se refiere al desarrollo de los cubos y lo que participa de la profundidad [...]. No existe ninguna ciudad en la que se aprecien debidamente estos conocimientos [...], a pesar de que tiene un encanto extraordinario.

A la estereometría le sigue la astronomía, pero no entendida como una mera observación de los astros sino como cálculo de sus movimientos y relaciones, es decir, no hay que ocuparse de ella con la vista mirando hacia arriba, sino con la inteligencia, ya que los astros que se ven sólo sirven de ejemplo para estudiar los que no se ven, (528e-529a):





La filosofía y la geometría.

Relieves en bronce de Antonio Benci (Pollaiolo) realizados hacia 1490. Roma, San Pedro, Grutas Vaticanas. Platón geometriza toda la realidad, no sólo la física y la natural sino también el ámbito de lo espiritual, hasta el punto de que las formas geométricas son la mejor ilustración del idealismo platónico. Además, la geometría tiene tal trascendencia filosófica que su desconocimiento veta la entrada en la Academia. La geometría es una ciencia preliminar, vía ineludible para el acceso a la filosofía.

La República (526e-527b).

> *[...] Pongamos pues la astronomía como cuarto estudio [...]. Esta ciencia obliga al alma a mirar hacia arriba y la conduce de las cosas de aquí abajo a las del cielo. [...]*

Glaucón pregunta de qué manera conviene estudiar la astronomía para que su conocimiento reporte alguna utilidad en el ascenso hacia lo inteligible (529c), a lo que Sócrates contrapone la astronomía práctica con una ciencia, independiente de los sentidos, que estudia los números y los movimientos considerados estrictamente en sí mismos, tomando el cielo como esfera armilar dotada de movimiento de la cual podemos servirnos en la verdadera astronomía al igual que nos auxiliamos de las figuras para estudiar geometría; pero sería tan absurdo reducir la ciencia astronómica al estudio de los fenómenos como buscar la verdad geométrica en los simples dibujos. Así pues, la astronomía debe ser estudiada como una rama más de las matemáticas, es decir, como la aritmética y la geometría, en términos de números puros y figuras perfectas, accesibles a los ojos de la razón y no a los de los sentidos (529c-530c):

> *[...] Hemos de pensar en esa policromía con que está adornado el cielo, que es lo más hermoso y lo más perfecto que puede existir. Ahora bien, esa belleza queda muy por debajo de la belleza verdadera que es la que produce la velocidad y la lentitud características en la relación de ambas, según el verdadero número y según todas las verdaderas figuras que se mueven a sí mismas y mueven a la vez todo lo que hay en ellas. Todo esto es accesible a la razón y al pensamiento, pero no a la vista. [...] Por tanto practicaremos la astronomía del mismo modo que la geometría, valiéndonos de problemas. Dejaremos a un lado las cosas del cielo si realmente queremos, ahondando en el estudio de la astronomía, obtener algún provecho de la parte inteligente que por naturaleza hay en el alma.*

Finalmente, Platón alude a la armonía de una manera que se advierte la concepción pitagórica sobre el fundamento aritmético de la música, ya que la armonía no es entendida como ejercicio

sensorial del oído, sino como análisis de las relaciones numéricas entre los sonidos: a partir del examen de los acordes que se oyen hay que elevar el espíritu para identificar los números armónicos, que son de gran utilidad para el ascenso hacia el bien y la búsqueda de lo bello (530d-531c):

> *Parece que así como los ojos han sido hechos para la astronomía, los oídos lo fueron para el movimiento armónico, y que estas ciencias son hermanas, al decir de los pitagóricos y de nosotros mismos. [...]. Los que se limitan a la medida de los acordes y sonidos realizan un trabajo ineficaz [...] al inclinarse por el oído antes que por la inteligencia [...] buscan también los números en esos mismos acordes que escuchan, pero no se consagran a los problemas ni consideran, por tanto, por qué unos números son armónicos y otros no lo son [...] que es una tarea útil para la búsqueda de lo bello y de lo bueno, aunque inútil para proseguir otros objetivos.*

Con gran solemnidad Platón alude una y otra vez en *La República* a la importancia de las cuatro ciencias del *Quadrivium pitagórico* en el fin perseguido con la educación de facilitar el acceso a la suprema ciencia de la dialéctica. Así pues, los estudios de estas ciencias son el preludio de la dialéctica, que sólo alcanzarán los espíritus capaces de dar y recibir razón de la esencia. Así como el prisionero de la caverna alcanza el término de lo visible cuando puede ver el sol, el espíritu dialéctico alcanza el término de lo inteligible cuando contempla la idea del bien.

En este punto del texto de *La República* aparecen discusiones nominalistas sobre cómo habría que llamar a las ciencias del *Quadrivium*, dándoseles el nombre de artes que luego han conservado (533d):

> *[...] El método dialéctico saca suavemente al ojo del alma del cieno de la ignorancia, y lo eleva hacia lo alto, sirviéndose para ello, como compañeras de trabajo y colaboradoras suyas, de las artes que hemos enumerado. Por*

seguir la costumbre, dábamos muchas veces a estas el nombre de ciencias [...] aunque con anterioridad utilizábamos la denominación de pensamiento discursivo [...].



Alegoría de la astronomía.

Biblioteca de El Escorial. P. Tibaldi (1586). La astronomía está representada por una figura femenina con sus diversos atributos de cálculo y medida, ya que está ciencia es una disciplina más de las artes y ciencias matemáticas, como lo son la aritmética y la geometría y debe estudiarse, por tanto, como éstas, en términos ideales de números y figuras perfectas. La astronomía no era entendida como la observación de los fenómenos celestes y el estudio dinámico de los astros sino como una geometría astral, una estereometría que aplica proporciones con la razón y el pensamiento pero no con la vista (*La República*, 529d).



Fresco de un monasterio del siglo XVI que representa a Platón en compañía de Pitágoras y Solón, el gran legislador y reformador ateniense.

Si Pitágoras representa a las matemáticas, Platón a la filosofía y Solón a las leyes, la reunión en este fresco de estas tres eminentes personalidades podría simbolizar el itinerario que Platón plasma en *La República*: las matemáticas como vía hacia la filosofía y la filosofía como preliminar ineludible de las leyes.

Platón zanja por fin la cuestión aludiendo de nuevo a la *alegoría de la línea*, pero resulta que invierte el uso de los términos intelección o inteligencia y ciencia, reservando este ultimo de forma exclusiva para la dialéctica. Además, resume gran parte de lo plasmado con anterioridad (534a):

> *Mi dictamen es que continuemos llamando ciencia a la primera y más perfecta forma de conocer* [dialéctica]; *pensamiento discursivo* [ciencias o artes matemáticas] *a la segunda, creencia a la tercera y figuración*

a la cuarta. Estas dos últimas constituyen la opinión, y las dos primeras la inteligencia. Aplícase la opinión a la generación, y la inteligencia a la esencia; de modo que la misma relación hay entre la inteligencia y la opinión que entre la esencia y la generación, e igualmente entre la ciencia y la creencia que entre el pensamiento discursivo y la figuración.

Tras los estudios matemáticos, el filósofo ya puede ejercitarse en la dialéctica, la auténtica ciencia de la esencia, en la que deshaciendo el camino de los saberes deductivos de las matemáticas, se remontará, de supuesto en supuesto (533c) hasta la idea suprema origen de todo ser y todo conocimiento: el bien.

8 El *Timeo*

“Era necesario que el creador perfectísimo realizase la más bella obra como dice Cicerón en su libro sobre el Universo citando al Timeo de Platón”.

J. Kepler. *El secreto del Universo* (*Mysterium cosmographicum*). 1992, pág. 93.

“El Timeo pasa por ser la obra más sublime de toda la filosofía antigua”.

Voltaire. Diccionario filosófico.

Los poliedros regulares se llaman a veces *cuerpos platónicos* por el relevante papel que juegan en el famoso diálogo de Platón sobre la naturaleza, *Timeo* (53a-56e), que es, sin duda, el más profundamente pitagórico de su obra. En él expone la asociación que presuntamente habría hecho Pitágoras entre el tetraedro, el cubo, el octaedro y el icosaedro y los cuatro elementos naturales primarios (fuego, tierra, aire y agua) que Empédocles había vinculado con la constitución de toda la materia. La veneración pitagórica por el

dodecaedro conduce a Platón, fascinado por todo lo pitagórico, a considerar a este sólido como la *quintaesencia*, el *quinto elemento*, la sustancia de los cuerpos celestiales, el símbolo místico del cosmos.

En *El Timeo*, la belleza es un elemento esencial que debe presidir la ordenación del cosmos por el demiurgo a través del número, la forma y la medida, de ahí la intervención de los poliedros en la configuración del Universo, por ser los cuerpos más bellos, por su regularidad y perfección (53a-53b):

> *Ciertamente antes de la formación del mundo, los cuatro elementos se comportaban sin razón ni medida. [...] Cuando el Todo comenzó a ordenarse [...], fue cuando todos los géneros recibieron de él* [de Dios] *su figura por la acción de las ideas y los números. [...] Y en la medida en que era posible el Dios ha hecho un conjunto, el más bello y mejor. Tomemos, pues, en todo y siempre esta proposición como base.*

Continúa Platón ponderando la belleza y propiedades estéticas de los poliedros (53d-53e):

> *Hace falta explicar qué propiedades deberían tener los cuerpos más bellos y en número de cuatro, para ser por una parte distintos los unos de los otros y por otra parte capaces de nacer uno de los otros al deshacerse. Si conseguimos esto tendremos la verdad sobre el origen de la tierra, del fuego y de los otros cuerpos intermedios entre esos dos, según relaciones regulares. Y no concederemos a nadie que sea posible ver en alguna parte cuerpos más bellos, cada uno de los cuales constituyendo un género distinto. Debemos, entonces, esforzarnos por componer estos cuatro géneros de cuerpos de extraordinaria belleza y demostrar que hemos comprendido suficientemente la naturaleza de ellos.*

Para Platón, la belleza de los sólidos regulares no reside realmente en su apariencia física, sino que permanece oculta en el



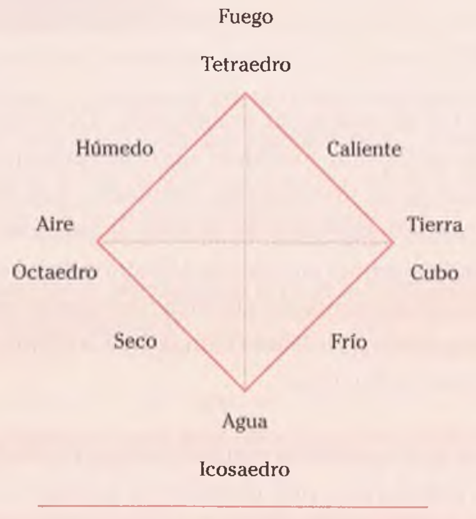
Busto encontrado cerca de Herculano y que en el siglo XVIII fue identificado como de Platón. Museo Arqueológico, Nápoles.

ámbito ideal del pensamiento matemático. Tal belleza anida en que se puede demostrar mediante un razonamiento apriorístico –independiente de la investigación empírica– que existen cinco y sólo cinco representaciones de la idea de poliedro regular. De hecho, éste sería el primer ejemplo en la historia de las matemáticas de un teorema fundamental de clasificación, que es precisamente el que corona a modo de brillante clímax final la última proposición de los *Elementos* de Euclides.

La belleza de los poliedros regulares se basa en su significación filosófica. La interacción entre el concepto general de regularidad y su realización en exactamente cinco sólidos sólo puede aprehenderse a través de las matemáticas. De los ejemplos pitagóricos –tetraedro, cubo y dodecaedro–, Platón asciende –con el concurso de Teeteto– al concepto general de poliedro y regresa a lo particular, añadiendo el octaedro y el icosaedro, completando así la lista. Se trata de un prototipo matemático del procedimiento dialéctico establecido en *La República* (511b) y un magnífico ejemplo de la concepción platónica de la forma y la participación: *cada uno de los cinco sólidos participa en la idea de sólido regular, e inversamente, esta idea se plasma exactamente en cinco casos particulares.*

Platón construye, con base en Pitágoras y con el auxilio de Teeteto, una de las primeras teorías matemáticas completas: una definición general junto con una completa clasificación de los objetos que la satisfacen. La definición es (55a):

La cosmogonía poliédrica platónica



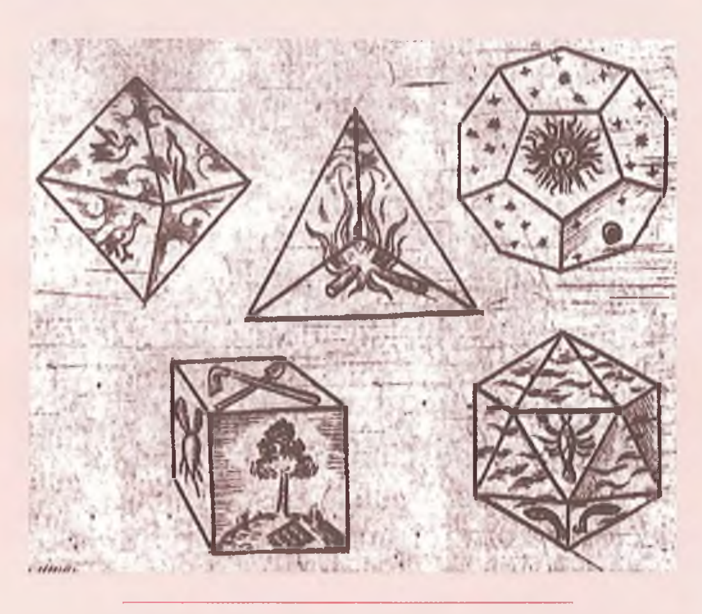
Síntesis gráfica de la Cosmogonía platónica del *Timeo*.

Las asociaciones que Platón hace en el Timeo *de los sólidos regulares con los elementos naturales primarios de Empédocles impresionaron tanto a Kepler que intentó dar una ingeniosa explicación de las mismas, justificativa de la cosmogonía pitagórico-platónica. Kepler asume intuitivamente que el tetraedro encierra el menor volumen para su superficie, mientras el icosaedro encierra el mayor. Siendo las relaciones entre superficie y volumen cualida-*

Un sólido es regular si tiene la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que está inscrito.

Platón pone en relación los cuatro elementos con los cuatro primeros poliedros. Pero para el filósofo, los cuatro tipos de sustancia

des de sequedad y humedad, y ya que el fuego es el más seco de los cuatro elementos y el agua el más húmedo, el tetraedro debe representar el fuego y el icosaedro el agua. El cubo, al ser el poliedro de mayor estabilidad, es asociado con la tierra. Dado que si se sujeta al octaedro por sus dos vértices opuestos con los dedos pulgar e índice puede hacérsele girar fácilmente, tiene la inestabilidad del aire. Finalmente el dodecaedro es asociado con el Universo porque tiene doce caras como doce son los signos del zodiaco.



Representación poliédrica visual de la cosmogonía pitagórico-platónica de Kepler (*Harmonice Mundi*, 1619).

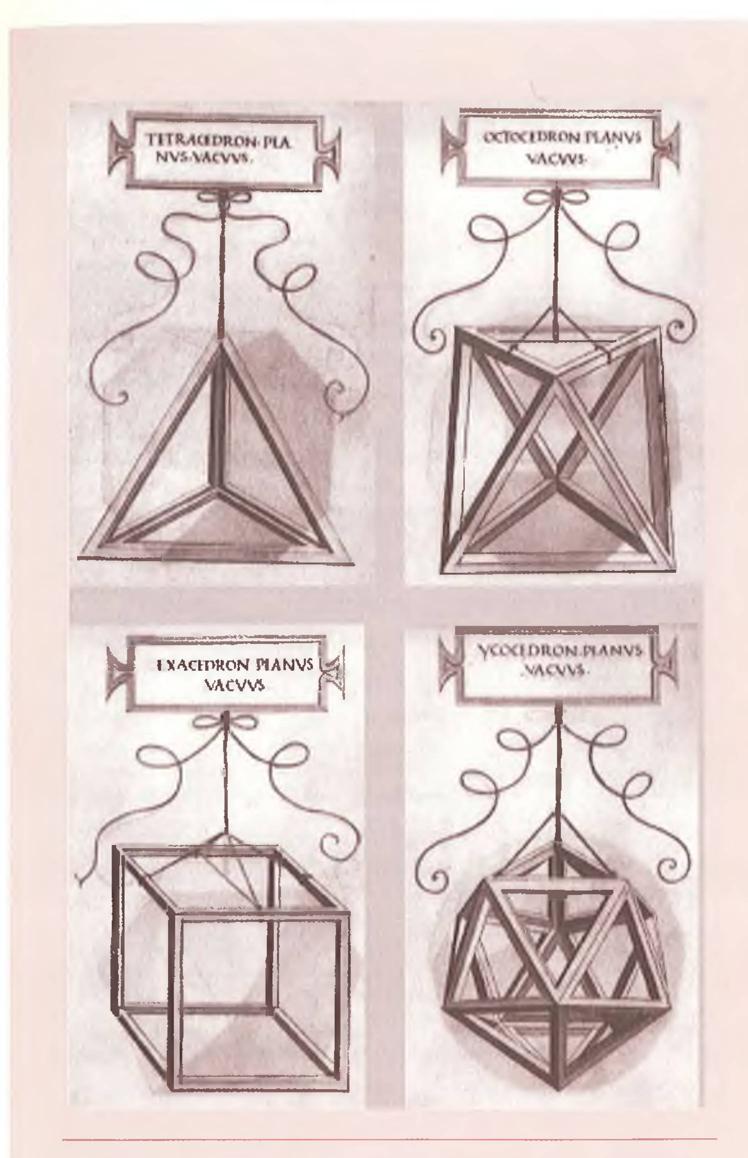


Página del *Timeo* de Platón, traducido al latín en el siglo V por Calcidius, famoso helenista hispanorromano. Manuscrito de la *Colección Vaticana* (*Reg. lat. 1308 fols. 21 verso-22 recto medbio01 NAN.10*). En el siglo XVI este manuscrito estaba en la Universidad de Leiden (Holanda), de allí pasaría a la biblioteca de la reina Cristina de Suecia, siendo entregado a la Biblioteca Vaticana a su muerte.

La divina proporción
Luca Pacioli
Capítulo LV

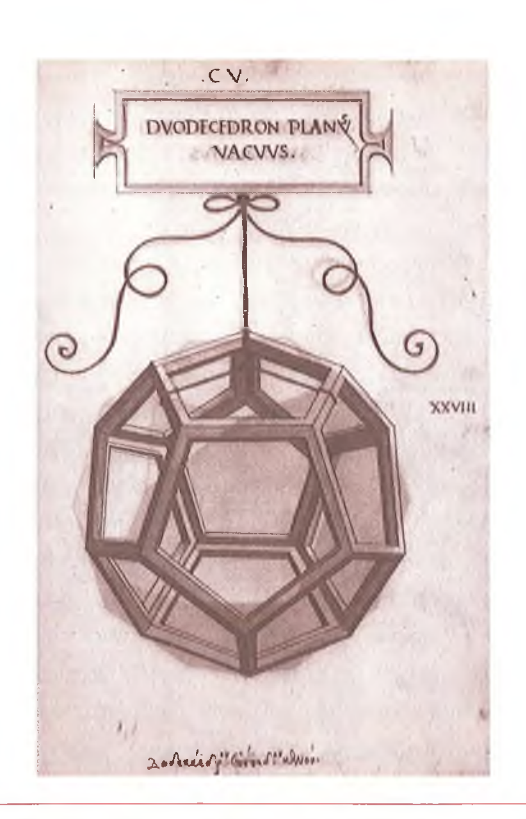
Hemos seguido hasta aquí sólo para demostrar que cómo la virtud de esos cinco cuerpos regulares se destila siempre a los cuerpos dependientes, a semejanza de los cinco cuerpos simples que concurren a la formación de todo compuesto creado. Por ello [...] se vio Platón constreñido a asignar las mencionadas cinco formas regulares a los cinco cuerpos simples que concurren en la formación de todo compuesto creado, es decir, a la tierra, el aire, el agua, el fuego y el cielo, como aparece en su Timeo, donde trata sobre la naturaleza del Universo. Al elemento tierra le atribuyó la forma cúbica, es decir, la del hexaedro, dado que ninguna figura precisa de mayor violencia para moverse y, entre todos los elementos, ninguno es más fijo, constante y firme que la tierra. La forma del tetraedro la atribuyó al elemento del fuego, dado que éste, cuando vuela hacia arriba, origina la forma piramidal, como nos muestra nuestra vista cuando vemos que en la base es ancho y uniforme y que va adelgazándose hacia arriba de tal modo que su llama en lo alto termina en punta como el cono de la pirámide. La forma del octaedro la atribuye al aire, pues, así como el aire sigue al fuego en un pequeño movimiento, del mismo modo la forma del octaedro sigue a la piramidal por su facilidad para el movimiento. La figura de veinte bases, o sea, el icosaedro, la asignó al agua, ya que, al estar limitada por más bases que ninguna otra figura, le pareció que en la esfera convenía más al movimiento de la cosa que desciende derramándose que no al de la cosa que asciende. Y la forma de doce bases pentagonales la atribuyó al cielo como a aquello que es

>>



Dibujos de Leonardo da Vinci de los poliedros regulares *vacíos* (tetraedro, octaedro, hexaedro e icosaedro) diseñados para ilustrar la obra de Luca Pacioli *La divina proporción* (Venecia, 1509).

receptáculo de todas las cosas, del mismo modo que el dodecaedro es receptáculo y albergue de todos los otros cuerpos regulares, como se puede comprobar por la inscripción de un cuerpo en otro y además, porque, así como en el cielo hay doce signos en su zodíaco y cada uno de ellos se divide en treinta partes iguales, de manera que su revolución anual sea 360, de igual modo tiene este dodecaedro doce bases pentagonales, cada una de las cuales se resuelve en cinco triángulos con la punta en el centro, y cada uno de dichos triángulos en seis escalenos, que son treinta triángulos en cada base y trescientos sesenta en total, como en el mencionado zodíaco. Estas formas son muy recomendadas por el celebérrimo filósofo Calcidio en su exposición del aludido Timeo, como también por Macrobio, Apuleyo y otros muchos, porque verdaderamente son dignas de toda recomendación por las razones que al hablar de su construcción se aducen y que muestran que la suficiencia de dichas cinco formas, así como las de los cinco cuerpos simples, no puede en modo alguno ser mayor; y, así como el número de los cuerpos simples no puede aumentar en la naturaleza, de igual modo es imposible señalar otros cuerpos que sean iguales de bases, lados y ángulos y que, situados en la esfera, al tocar un ángulo la toquen todos los demás. Porque si se pudiera encontrar en la naturaleza un sexto cuerpo simple, el Sumo Hacedor resultaría disminuido y sería posible achacarle falta de prudencia al no haber previsto desde el principio todas las necesidades oportunas. Por esta razón Platón atribuyó tales elementos a cada uno de los mencionados cuerpos simples, argumentando así como un magnífico geómetra y profundísimo matemático; viendo que las cinco diversas formas de estos cuerpos no pueden en modo alguno imaginarse ni formarse como no sea tendiendo hacia la esfera, con bases y ángulos iguales, según se demuestra por la penúltima del décimo tercero [de los Elementos de Euclides], oportunamente aducido por nosotros, argumentó con razón que dichas formas conducían a los cinco cuerpos simples y que de ellas dependía toda otra forma.



La influencia pitagórico-platónica le infunde a Luca Pacioli la veneración hacia el dodecaedro, al que llama *nobilísimo cuerpo regular*. Con argumentos teológicos y filosóficos de naturaleza platónica con origen en el *Timeo* y geométricos con fuente en los *Elementos* de Euclides, Pacioli asevera que la *divina proporción* confiere el ser formal al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo de doce pentágonos, llamado dodecaedro, que *«por estar dotado de una singular prerrogativa con respecto a los demás* [poliedros], *a ninguno ha prohibido o vedado alojamiento, siendo receptáculo de todos. Por ello el antiguo Platón lo atribuyó al Universo»* (Luca Pacioli, *La divina proporción*, Cap. XLVI).

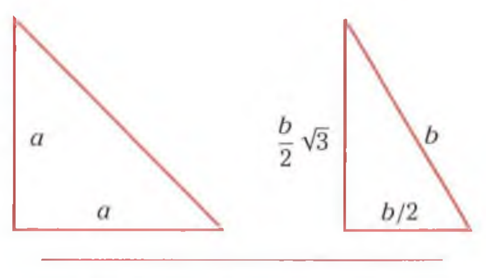
no son los primeros principios –el *arjé*– del Universo (48b-48c), por eso, en primer lugar, descompone los sólidos regulares en superficies: considera que el tetraedro, el octaedro y el icosaedro constan de un mismo tipo de superficie –el triángulo equilátero–, mientras

que el cubo se compone de cuadrados. Después, Platón realiza una segunda descomposición, porque las dos clases de superficies que componen los poliedros se obtienen a partir de dos clases de triángulos que les anteceden en el orden de los principios (53c):

> *Toda superficie de formación rectilínea está compuesta de triángulos. Ahora bien, todos los triángulos derivan su principio de dos tipos de triángulos, de los cuales cada uno tiene un ángulo recto y los otros agudos.*

Platón considera dos tipos de triángulos rectángulos que corresponderían a los más bellos, –el triángulo rectángulo isósceles y el escaleno mitad de un triángulo equilátero– (54a, 54b):

> *De los dos triángulos el que es isósceles no tiene más que una especie; el que es escaleno tiene un número indefinido de ellas. [...]. entre ellos hay uno que es el más bello [...], será aquel que, utilizado dos veces, nos permita formar el tercer triángulo, que es el equilátero. Escojamos pues dos triángulos de los que están constituidos los cuerpos del fuego y de todos los demás elementos: uno es isósceles, el otro tiene siempre el cuadrado de su lado mayor* [su cateto mayor] *igual a tres veces el cuadrado del menor.*



Los más bellos triángulos según el *Timeo* de Platón.

A continuación (54d-55c) Platón realiza una curiosa descomposición de las caras de los cuatro sólidos a partir de los triángulos elementales que ha descrito como los más bellos, es decir, estudia

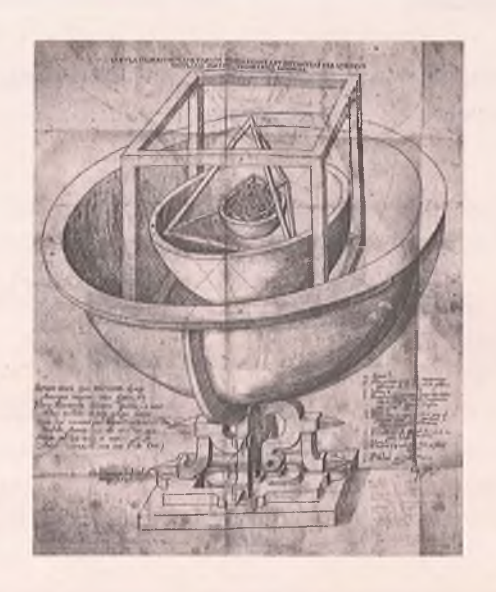
Kepler y la cosmología platónica

Seducido por la cosmogonía platónica, Kepler ideó una cosmología basada en los cinco sólidos regulares en la creencia de que serían la clave utilizada por el creador para la construcción de la estructura del Universo. Dentro de la órbita o esfera de Saturno, Kepler inscribió un cubo, y dentro de éste la esfera de Júpiter circunscrita a un tetraedro. Inscrita en éste situó a la esfera de Marte. Entre las esferas de Marte y la Tierra estaba el dodecaedro, entre la Tierra y Venus el icosaedro, entre Venus y Mercurio el octaedro. Y en el centro de todo el sistema el Sol.

En la época de Kepler se conocían seis planetas –Mercurio, Venus, la Tierra, Marte. Júpiter y Saturno–. Mientras que hay infinitos polígonos regulares, sólo existen cinco poliedros regulares. No podía ser una casualidad, el dios geómetra no improvisa. Kepler pensó que los dos números estaban vinculados: "hay sólo seis planetas porque hay sólo cinco poliedros regulares", y da una visión del sistema solar que consiste en sólidos platónicos inscritos, encajados cada uno dentro de otro. Al creer que había reconocido el esqueleto invisible del Universo, llamó a su revelación El secreto del Universo. En palabras de Kepler:

> "Desde hace dos mil años, la doctrina de las cinco figuras geométricas distribuidas entre los cuerpos del Universo se atribuye a Pitágoras, de quien Platón tomó esta concepción filosófica"
>
> (Mysterium Cosmographicum [El secreto del Universo])
>
> "Tenemos orbes mediante el movimiento y cuerpos sólidos mediante números y magnitudes; nada falta sino sólo diga-

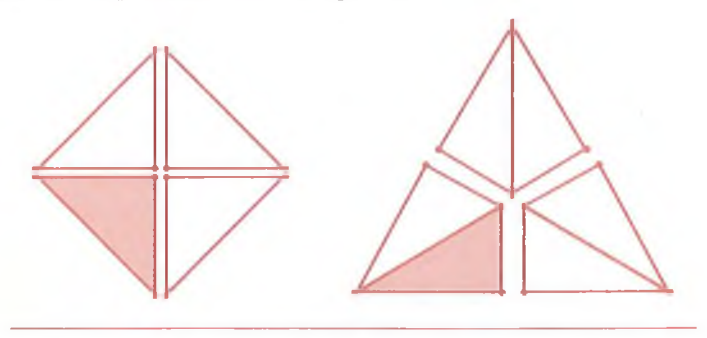
mos con Platón "Dios siempre geometriza" y en esta fábrica de móviles inscribió a los cuerpos sólidos dentro de esferas y a las esferas dentro de sólidos, de forma que ningún sólido quedase sin vestir por dentro y por fuera mediante orbes móviles. Pues por las Proposiciones 14, 15, 16 y 17 del Libro XIII de Euclides, es evidente que estos cuerpos son adecuados por naturaleza para esta inscripción y circunscripción. Por lo cual si se yuxtaponen los cinco cuerpos separados y encerados por orbes tendremos el número de seis orbes".



Modelo cosmológico de Kepler basado en los sólidos pitagórico-platónicos e inspirado en los modelos de Leonardo. Grabado de la obra de Kepler *Mysterium cosmographicum*, 1596. Biblioteca Universitaria de Basilea. Los cinco sólidos platónicos fascinaron de tal modo a Kepler que veía en ellos los elementos básicos estructurales de la construcción del Universo. Kepler desarrolla un impresionante modelo cosmológico del Universo donde imagina que los planetas se abrían camino en un gigantesco encaje de poliedros regulares.

la generación y composición de los poliedros regulares mediante elementos geométricos que en última instancia son cuatro triángulos rectángulos isósceles –cada uno de ellos es la cuarta parte de un cuadrado– para el caso de la cara del cubo, mientras que para el tetraedro, octaedro e icosaedro, considera sus caras compuestas por seis triángulos rectángulos –escalenos bellos– con la hipotenusa doble que el cateto menor –cada uno de ellos mitad de un triángulo equilátero–, obtenidos bisecando los ángulos de triángulos equiláteros y combinando seis mitades para formar un nuevo triángulo equilátero.

La representación gráfica de la generación triangular de las caras de los poliedros sería la siguiente:



Generación de las caras de los poliedros cubo y tetraedro, octaedro e icosaedro, mediante *los triángulos más bellos*, según el *Timeo* de Platón (54d-55c).

Así pues, para Platón el análisis de la multiplicidad de las cosas no se detiene en los cuatro elementos tradicionales– fuego, tierra, aire y agua–. Bajo la influencia pitagórica, para Platón la conformación de la materia está determinada en un nivel anterior por su estructura matemática geométrica que se remonta a dos elementos geométricos básicos –el semi triángulo equilátero y el rectángulo isósceles–.

En cuanto al quinto poliedro regular, el dodecaedro, resulta que no puede engendrarse a partir de los *triángulos más bellos*, por eso

Platón no lo asocia con los elementos, sino que le concede una importancia muy superior, indicando que dios lo empleó en la delineación del Universo. En efecto, Platón menciona al dodecaedro con una críptica sentencia de corte pitagórico (55c):

> *Quedaba aún una sola y única combinación; el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final.*

Platón hace otra referencia cósmica al dodecaedro en el diálogo sobre el alma, el *Fedón* (110b):

> *Se dice que la tierra se presenta a la vista, si alguien la contempla desde arriba, como las pelotas de doce pieles...*

Sigue Platón en el *Timeo* argumentando la identificación de cada poliedro –de acuerdo con sus cualidades– con cada uno de los elementos primarios para concluir (55d-56b):

> *A la tierra le atribuimos la figura cúbica, porque la tierra es el* [elemento] *más difícil de mover, el más tenaz, el de las bases más sólidas, [...], la figura sólida de la pirámide* [tetraedro] *es el elemento y el germen del fuego; la segunda en orden de nacimiento* [octaedro] *es el elemento del aire, y la tercera* [icosaedro]*, el del agua.*

Para Platón –bajo una aureola de filosofía pitagórica–, el hacedor del Universo creó el orden a partir del caos primigenio de los elementos por medio de las formas y los números esenciales de los poliedros, en una acción que culmina ese ordenamiento en la disposición armónica de los cinco elementos en el Universo físico (56c):

> *Y por lo que respecta a las relaciones numéricas que se hallan en su número, en sus movimientos y en sus demás propiedades, hay que considerar siempre*

que el Dios, en la medida en que el ser de la necesidad se dejó persuadir espontáneamente, las ha realizado en todo de manera exacta, y así ha armonizado matemáticamente los elementos.

He aquí una bella analogía que concede a los cinco poliedros regulares el poder de dar forma al mundo material, de modo que subyace en Platón una *geometría sagrada* que actúa como metáfora del orden universal.

La generación triangular de los cinco sólidos platónicos

A continuación será necesario explicar cuál es la forma propia de cada uno de los cuerpos, cómo se produce y de qué combinación de números procede.

Comenzaremos por la primera especie, aquella cuyos componentes son más pequeños. El elemento matemático de esta especie es aquel cuya hipotenusa tiene una longitud doble de la del ángulo más pequeño del ángulo recto. Dos de esos triángulos se pegan según la hipotenusa, y esta operación se renueva y se repite tres veces, de manera que todas las hipotenusas y todos los lados pequeños de los ángulos rectos vienen a coincidir en un mismo punto que es como un centro. Nace así un triángulo equilátero único, compuesto de pequeños triángulos en número de seis. Cuatro de esos triángulos equiláteros, unidos según tres ángulos planos, dan lugar a un sólo e idéntico ángulo sólido que tiene un valor inmediatamente inferior al del ángulo plano más obtuso. Y una vez formados cuatro ángulos de este tipo, nace la primera especie de sólido, que tiene la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que está inscrito.

Platón continúa en el *Timeo* explicando una especie de transición entre los diversos elementos como reflejo de las posibles disoluciones de unos poliedros para formar otros (56c-56e):

> *[...] La tierra nunca puede convertirse en otro elemento. [...] Si el agua es partida por el fuego o por el aire, es posible que dé lugar a un cuerpo de fuego y dos de aire. En cuanto a los elementos de aire, en caso de perder su unidad y deshacerse, darán lugar a dos corpúsculos de fuego. A la inversa,*

La segunda especie se compone de los mismos triángulos. Ocho de entre ellos se reúnen para formar triángulos equiláteros, y esos a su vez forman un ángulo sólido único, formado de cuatro ángulos planos. Cuando se construyen seis ángulos sólidos de esta clase, resulta acabado el cuerpo de la segunda especie.

La tercera especie se forma por la unión de ciento veinte triángulos elementales, es decir, de doce ángulos sólidos, de los cuales cada uno está comprendido dentro de cinco triángulos planos equiláteros, y tiene bases que son veinte triángulos equiláteros. Cuando hubo generado estos tres sólidos, el primer tipo de triángulo acabó su función.

Por su parte, el triángulo isósceles engendró la naturaleza del cuarto cuerpo elemental. Este cuerpo esta formado por cuatro triángulos isósceles: los lados de sus ángulos rectos se une en un centro y forman una figura rectangular equilátera. Al pegarse seis de estas figuras, dan lugar a ocho ángulos sólidos, de los que cada uno está constituido por la unión armónica de tres ángulos planos. Y la figura así obtenida es la figura cúbica, que tiene como bases seis superficies cuadrangulares, de lados iguales.

Quedaba aún una sola y única combinación: el Dios se sirvió de ella para el Todo cuando esbozó su disposición final.

Platón, Timeo *(54d–55c)*

cuando el fuego rodeado por el aire, el agua o algo de tierra [...] lucha y, vencido, se quiebra, dos cuerpos de fuego se condensan en un elemento de aire. Si el aire a su vez es dominado y fragmentado, de dos elementos y medio se forma por aglomeración, un cuerpo completo de agua.



Platón con el rostro de Leonardo. Fragmento de la *Escuela de Atenas* de Rafael. Platón sostiene en una mano el *Timeo* y eleva hacia el cielo el dedo índice de la otra mano como indicando lo ideal y lo sublime.

A partir de la asociación de los cuatro poliedros –tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro– con los cuatro elementos –fuego, tierra, aire y agua–, Platón cifra en la composición y descomposición de los poliedros regulares la explicación y descripción de fenómenos naturales. En concreto saca consecuencias naturales de las siguientes configuraciones:

- El icosaedro, con sus veinte triángulos equiláteros, se puede disolver en dos octaedros y un tetraedro.
- El octaedro, con sus ocho triángulos equiláteros, se puede disolver en dos tetraedros.
- La disolución de dos tetraedros, con sus cuatro triángulos equiláteros cada uno, se puede condensar en un octaedro.
- La disolución de dos octaedros y medio se puede condensar en un icosaedro.

Al igual que había hecho Pitágoras en forma numérica, más allá de interpretaciones mitológicas, aunque igualmente fantásticas, Platón apura la explicación de las leyes de la naturaleza en términos geométricos.

9 La reminiscencia

"Platón se interesó enormemente por la matemática porque la consideraba como el más importante de todos los instrumentos de la educación".

L. Hull, *Historia y filosofía de la ciencia*. Ariel. Barcelona, 1981, pág. 71.

Las matemáticas ejercieron una influencia trascendental en el pensamiento de Platón. En numerosos fragmentos de sus diálogos Platón sitúa a las matemáticas en la aristocracia intelectual del conocimiento como base de la formación e instrucción de la juventud, como fundamento de todo saber y, en particular, como ineludible preparación para el estudio de la filosofía.

A lo largo del desarrollo científico y filosófico de los estudios de la Academia platónica se va produciendo una progresiva matematización de los fundamentos, de forma que Platón pitagoriza cada vez más su pensamiento cuando considera que las matemáticas ya no son sólo una propedéutica de la filosofía sino el núcleo

fundamental de la misma. El matematicismo platónico extrajo de la meditación y de la reflexión sobre las matemáticas una *teoría del conocimiento* que desborda el dominio matemático y que, más allá del pitagorismo, parecía haber absorbido a la propia filosofía.

Para analizar esta cuestión, son de gran interés ciertos textos de Aristóteles en los que el filósofo estagirita relata con gran meticulosidad los debates de los filósofos de la Academia platónica en relación a la categoría que había de otorgarse a las determinaciones numéricas y a las formas geométricas en el núcleo de la *teoría de las ideas* de Platón. Aristóteles realiza una síntesis de la filosofía de Platón en el capítulo 6 del Libro I de la *Metafísica*, para pasar a una verdadera refutación de la *teoría de las ideas* en el capítulo 9. De esta forma, como escribe V. Gómez Pin (en su obra *La tentación pitagórica*, pág. 35):

> "*Aristóteles procede a un "arreglo de cuentas" con sus antiguos correligionarios de Academia, los cuales, a su juicio, caen en el pecado de reducir toda la filosofía a matemáticas*".

El propio Aristóteles llega a escribir (*Metafísica*, Libro I. Cap. 9, (992a):

> "*Para nuestros contemporáneos, la filosofía se ha convertido en unas matemáticas, aunque proclamen que estas se deben estudiar no por sí mismas, sino solamente en razón de otras cosas*".

Debemos preguntarnos por qué las matemáticas tienen una importancia tan relevante en el pensamiento de Platón, hasta llegar a asignarle una jerarquía excepcional y un valor fundamental entre todos los estudios de la Academia de Atenas.

Por influencia de Parménides, Platón insiste en la radical distinción entre los objetos sensibles, imperfectos y efímeros, sujetos al cambio y sus modelos eternos, perfectos e inmutables. Entre ambos

dominios de la realidad están situadas precisamente las entidades matemáticas. Sea una figura geométrica, por ejemplo un círculo, visible en la naturaleza o construida por un artífice. Por necesidad estas figuras son imperfectas. Al dibujarlas resulta que el círculo y la tangente, al tener un cierto espesor, se tocan en más de un punto. Pero al considerar el círculo ideal y la tangente ideal –que responden a las definiciones que el geómetra toma como objeto de sus especulaciones– se reconoce que círculo y tangente no tienen más que un punto de contacto. Se está manejando un concepto. Pero asoma la pregunta, ¿cómo surge ese concepto? No puede resultar por generalización, a partir de un conjunto de objetos reales, ya que ninguno de estos responde exactamente a la definición de círculo, de modo que la aparición de los entes matemáticos es inexplicable por una reflexión sobre la realidad sensible. Para Platón, la vía de acceso a los auténticos objetos de la geometría –que son realidades inteligibles– es la *reminiscencia* o recuerdo de conocimientos adquiridos en una vida anterior.

La *teoría de la Reminiscencia* en Platón aparece por primera vez en el diálogo *Menón* (82b-85b) a propósito de una pregunta que Menón plantea a Sócrates acerca de si la virtud se puede enseñar (70a), que deriva hacia una especulación acerca de la posibilidad del conocimiento (80d-e), que consta de tres pasos: una deducción de la doctrina de la *reminiscencia* a partir de la mítica creencia órfico–pitagórica en la preexistencia y trasmigración del alma (81a-82a), una demostración efectiva de esa doctrina mediante una experiencia geométrica de corte mayéutico sobre la *duplicación del cuadrado*, llevada a cabo a lo largo de una extensa conversación de Sócrates con un esclavo (82b-85b), y una recapitulación, al final, de los resultados alcanzados (85c-86c).

Sócrates muestra un cuadrado de dos pies de lado, ante el cual el esclavo afirma con seguridad que *un cuadrado con el doble de su área tendría un lado con el doble de longitud (¿afirmas que de la línea doble se forma la superficie doble?* (83a). Con el dibujo de unas pocas líneas Sócrates

Fragmentos del Menón

82a. No hay enseñanza, sino reminiscencia.

82b. ¿Qué hace el esclavo? ¿Recuerda o está aprendiendo de mí?

82e. ¿Ves, Menón, que yo no le enseño nada, sino que le pregunto todo? [..] Observa cómo él va a ir recordando en seguida.

84a. Te das cuenta una vez más, Menón, ¿en qué punto se encuentra ya del camino de la reminiscencia?

84d. ¿Qué es lo que efectivamente va a encontrar, buscando conmigo, sin que yo haga más que preguntar, y sin enseñarle?

85c. Y estas opiniones que acaban de despertarse ahora, en él, son como un sueño. Si uno lo siguiera interrogando muchas veces sobre esas mismas cosas [...] Ten la seguridad de que las acabaría conociendo con exactitud.

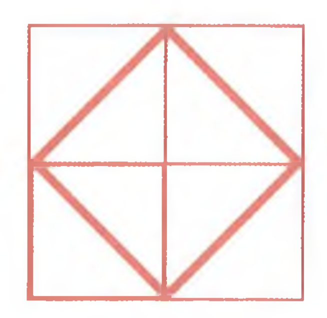
85d. ¿Llegará a conocer sin que nadie le enseñe, sino sólo preguntándole, recuperando él mismo de sí mismo el conocimiento? [...] Y este recuperar uno el conocimiento de sí mismo, ¿no es recordar?

85e. El conocimiento que ahora tiene, ¿no es cierto que o lo adquirió alguna vez o siempre lo tuvo? Si siempre lo tuvo, entonces siempre ha sido un conocedor; y si, en cambio, lo adquirió alguna vez, no será por cierto en esta vida donde lo ha adquirido.

86a. Si no lo adquirió en esta vida, ¿no es ya evidente que en algún otro tiempo lo tenía y lo había aprendido cuando no era todavía un hombre? [...] pues, tanto en el tiempo en que es hombre, como en el que no lo es, hay en él opiniones verdaderas, que, despertadas mediante la interrogación, se convierten en fragmentos de conocimientos, ¿no habrá estado el alma de él, en el tiempo que siempre dura, en posesión del saber?

86b. Por tanto, si siempre la verdad de las cosas está en nuestra alma, ella habrá de ser inmortal. De modo que es necesario que lo que ahora no conozcas –es decir, no recuerdes– te pongas valerosamente a buscarlo y a recordarlo. [...] Creemos que es necesario buscar lo que no se sabe para ser mejores.

muestra el error al esclavo: *de la línea doble no resulta una superficie doble sino cuádruple* (83c). La respuesta tiene que estar entre dos y cuatro (83d), así que el esclavo sugiere que tendrá tres pies, pero enseguida se da cuenta con un diagrama que esto daría lugar a un cuadrado de área 9, y no de 8 como se requiere (83e).



Sócrates comienza ahora la parte constructiva de la lección: traza una diagonal a través del cuadrado original, y con nuevas líneas sobre el diagrama, el esclavo va descubriendo que la diagonal corta al cuadrado por la mitad (85a) y que un cuadrado dibujado al tomar la diagonal como lado, contendría cuatro mitades semejantes, es decir, un área igual a dos veces el total (85b).

A lo largo del diálogo platónico, el esclavo alcanza racionalmente el resultado sin sustentarse en un conocimiento explícitamente geométrico, sino en el buen juicio –llamado también sentido común–, que configura una forma de intuición básica que actúa en la vida cotidiana. Recordemos la visión que tiene Descartes sobre el sentido común –que viene a ser la noción cartesiana de razón o *bonae mentis*– con la que se inicia *El Discurso del* Método (DM.AT, VI, 1–2):

> *"El sentido común es la cosa mejor repartida del mundo.* [...] *La facultad de juzgar bien y de distinguir lo verdadero de lo falso –que es propiamente lo que se nombra sentido común o razón–, es naturalmente igual en todos los hombres".*

Sócrates se limita a interrogar al muchacho con preguntas en un orden adecuado y en modo alguno a enseñar, es decir, a guiar al esclavo a través de una interpelación con hábiles cuestiones

que fertilizan el escaso saber matemático del esclavo y que lleva al convencimiento de que *el ignorante sabe*, lo que permite a Sócrates declarar en tono solemne que a la solución de la tarea ha llegado

El Menón

Según W. Guthrie (Historia de la filosofía griega. vol. 4. RBA, pp. 236, 240):

> "Se ha descrito el Menón como un microcosmos de la serie completa de los diálogos platónicos. [...] Podría incluso albergarse la pretensión de descubrir en el Menón el momento mismo en que Platón fue por primera vez deliberadamente más allá del Sócrates histórico, para suministrar a su doctrina unos fundamentos filosóficos propios".
>
> "La lección principal del Menón es que lo que se llama la adquisición del saber no es más que la explicación de lo que estaba implícito, la actualización del saber que ya poseíamos potencialmente".

Utilizando el método mayéutico (Menón *82b-85b), Sócrates induce, en un joven esclavo ignorante, la resolución por sí mismo, del problema de la* duplicación del cuadrado. *Una concatenación de preguntas de Sócrates, entrelazadas heurísticamente con las respuestas del esclavo, excita el recuerdo que éste tiene de otras vidas, capta la reminiscencia y actualiza al presente de su mente el conocimiento geométrico que le permite resolver el problema. Así pues, a través de una buena y bien dirigida orientación educativa, el saber inherente, que está oculto pero latente en el esclavo, retorna a la memoria como recuerdo.*

el esclavo por sus propios medios, ya que, a requerimiento del filósofo, el esclavo no ha contestado nada que no fuera idea suya propia, de forma que, simplemente, Sócrates ha sacado a relucir un conocimiento que siempre estuvo en su mente. Se podría pensar que las primeras preguntas (82d) llevan implícitas las respuestas, pero no es así; son una fase preliminar en la que Sócrates plantea el problema geométrico y desea cerciorarse, además, de que el esclavo entiende los términos que se van a emplear.

En este punto conviene observar el por qué de la elección, por parte de Platón, de un ejemplo matemático, debido a la naturaleza tanto de la verdad y de los entes matemáticos como del acto de transmisión del conocimiento matemático. En Platón siempre está presente la distinción entre el conocimiento empírico –referente al mundo natural mutable, efímero y degradable, que se extrae de la experiencia del mundo exterior a nosotros o de una autoridad externa–, y el conocimiento inteligible –el de las verdades universales, eternas e intemporales, que emerge de nuestra mente y es desarrollado por nosotros mismos–. Aunque para el planteamiento y resolución del problema geométrico tanto Sócrates como el esclavo se guían por dibujos, los asuntos que se investigan no se refieren a los cuadrados materiales. El esclavo sabe, sin que se le aclare, que la cuestión no alude al cuadrado particular que se dibuja, sino al concepto universal de cuadrado. En este sentido recordemos el texto, ya citado, de *La República* (510d-510e):

> *Los matemáticos se sirven de figuras visibles que dan pie para sus razonamientos, pero en realidad no piensan en ellas, sino en las originales a las que se parecen. Y así, por ejemplo, cuando tratan del cuadrado y de su diagonal, no tienen en el pensamiento el que dibujan sino el cuadrado absoluto y su diagonal.*

Lo que trata, pues, el diálogo de Platón son verdades matemáticas que pertenecen al mundo inteligible, no al mundo sen-

sible, que se basan en prototipos ideales de las figuras matemáticas, de donde podemos inferir, por afinidad o analogía, que los ideales de las virtudes éticas nos remiten a la existencia de las ideas modélicas y formas eternas de la bondad, la belleza, el bien, la verdad, la justicia... cuya adquisición es la meta de la filosofía platónica, y que permanecen siempre intemporalmente idénticas, como la tangente toca al círculo en un solo punto, desde siempre y para siempre. Es más, las verdades morales incluso están en un orden metafísico más elevado que el que corresponde a las formas e ideas matemáticas, porque la mente puede rememorarlas mediante el pensamiento puro sin recurrir a las imágenes sensibles en las que se apoyan los razonamientos matemáticos. Nuevamente, aparece aquí la *teoría de las ideas* y la correspondencia entre la jerarquía de los grados del saber y los grados de la realidad, que de forma tan descriptiva expone Platón, como vimos en el estudio de la *alegoría de la línea* (*La República*, 509d-511e).

En cuanto a la educación, tránsito de la enseñanza al aprendizaje, las matemáticas no pueden ser comunicadas de maestro a discípulo como se haría con una fórmula química o con un dato de erudición histórica. Cada sujeto discente debe comprenderlo por sí mismo, con las luces de su razón, y cuando es así, queda de manifiesto el hecho de que descubre – en el sentido de desvelar (quitar el velo que impedía ver)– lo que todo el mundo debe descubrir. Las respuestas positivas o negativas del esclavo responden a lo que la razón dicta como obvio, y lo que muestra el error o el acierto más que las preguntas son los diagramas, de modo que si el muchacho tuviera afición a la geometría, con la necesaria dedicación y concentración, podría dibujar los diagramas y deducir la verdad a partir de ellos, sin necesidad de un instructor, como cuenta la tradición o la leyenda respecto de Pascal, que abandonando sus juegos en favor de la geometría, presuntamente habría planteado y demostrado muchas de las proposiciones de Euclides antes de ojear *Los Elementos*.

El saber matemático es, pues, inmanente y no adquirido y avanza y se actualiza a través de la educación bien dirigida, ya que por el carácter reminiscente del saber, *hablar equivale a saber*, aunque éste se halle ausente de la conciencia. Basta el buen juicio y la armonía, apertura, naturalidad, motivación y disposición que propician el hacerse perceptivo a la conversación que fertiliza la semilla que tenemos en nuestra mente. En palabras de Descartes (*Reglas para la dirección del espíritu*. (AT.X. 374):

> *"No sé que tiene la mente humana de divino, donde yacen las primeras simientes de los pensamientos útiles que, por más olvidadas y asfixiadas que estén por estudios desencaminados, producen espontáneamente frutos".*

Basta, inicialmente, haber adquirido por vía de abstracción o generalización consecutiva de la experiencia de la vida cotidiana, los rudimentos y destrezas que, aplicados y desarrollados con una buena orientación educativa, confirman que tan limitado saber original supone, al ir recordando, potencialmente el saber entero. Pero Platón establece que el aprendizaje constituye un proceso continuo con varias etapas entre la aparente ignorancia absoluta y el conocimiento. En ellas pueden aparecer propuestas falsas –como cuando el esclavo afirma que *el cuadrado de área doble tendrá lado doble* (82e)–, como es natural en todo proceso de aprendizaje, y es que no puede darse un salto –que sería imposible– entre la total ignorancia y el conocimiento. De hecho la tesis de Platón es que no existe una ignorancia absoluta, ya que la mente no es una *tabla rasa* sino que lleva impresa el saber, oculto con una tinta invisible, *las primeras simientes de los pensamientos* dice Descartes, para quien la naturaleza imprime en la mente humana cierta simiente de verdades eternas, como las verdades matemáticas–, que están aguardando a que un reactivo adecuado las haga perceptibles con la luz de la razón.

Tras la respuesta correcta del esclavo al problema geométrico planteado (85b), Sócrates dice que *las opiniones verdaderas han*

despertado en él como en un sueño (85c), y quiere remarcar que el proceso de *reminiscencia* como actualización del saber oculto pero latente sería más efectivo todavía si el esclavo hubiera sido sometido, con asiduidad, a un proceso educativo de aprendizaje, no basado en la información sino en la contrastación con el saber geométrico inmerso en la naturaleza del esclavo, que lo constituye como sujeto de conocimiento matemático. Así que el acceso al saber es un reencuentro con la verdad de la que cada cual es portador, verdad que retorna con la efectividad de la dialéctica de la interrogación del maestro, que es aquello en lo que debe consistir la efectiva edu-

La inscripción en el frontispicio de la Academia



La celebre frase de ingreso en la Academia –“No entre nadie ignorante en geometría”–, *es un epígrafe lapidario con un evidente significado emblemático del pensamiento y el espíritu platónico. La máxima podría ser una ficción poética creada por la retórica helenística, pero expresa de modo absolutamente perfecto la trascendental influencia de la geometría en el programa que Platón llevaba a cabo en la Academia, tal como lo ratifican numerosos pasajes de* La República, *el* Timeo, *el* Menón *y otros diálogos del filósofo, plenos de referencias, contextos, reseñas, testimonios y comentarios matemáticos.*

Ya sea realidad histórica o fantástica, la memorable frase ha tenido una gran repercusión simbólica, por ejemplo en Descartes,

cación. Sócrates nos viene a decir que el esclavo fue sabio siempre, al menos respecto de la geometría y demás ciencias matemáticas y que la educación, entendida como actualización al presente, restaura en el esclavo la verdad que le es inherente. El maestro es simplemente un polo en la dialéctica que constituye el proceso de aprendizaje a través del que se restituye, en el sujeto a quien nadie ha enseñado geometría, el saber preestablecido de *la geometría que todos llevamos dentro* y que nos hace genuinamente humanos. Lo que no sabemos es si el esclavo de Menón, además de *llevar la geometría dentro* es portador de otros muchos contenidos implíci-

que al tomar a las matemáticas como fundamento de la sabiduría universal *nos habla de la* Mathesis Universalis *como extensión del modelo de conocimiento cierto y seguro de las matemáticas. Con ello Descartes se acerca al pensamiento platónico de* La República, *que concebía a las matemáticas no sólo como el fundamento de todo el saber humano, sino también como el camino ineludible de la* paidea, *entendida como formación del espíritu humano en todas sus facetas. Por eso escribe en la Regla IV de* Reglas para la dirección del espíritu *(AT.X.375-376):*

"[Pensé] por qué sucedía que antiguamente los primeros creadores de la filosofía no quisieran admitir para el estudio de la sabiduría a nadie que no supiese Mathesis, como si esta disciplina pareciese la más necesaria de todas para educar y preparar los espíritus para comprender otras ciencias más altas".

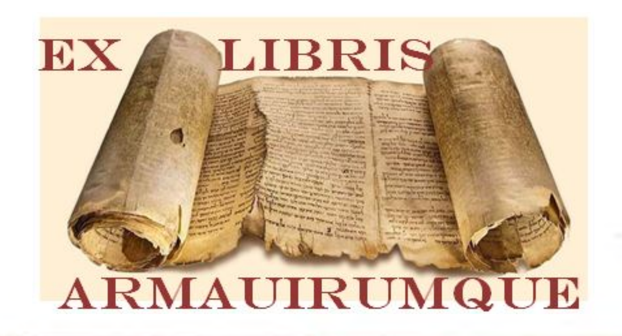
También Leonardo, impactado por la expresiva cláusula platónica, hace una declaración de principios de su genialidad artística, cuando la parafrasea en el mismo arranque del proemio del Tratado de pintura, *al escribir:*

"No lea mis principios quien no sea matemático".

tos que no son producto de la información y mediante los que *en otra vida* quedó constituido como natural y radicalmente humano.

En resumen, para Platón el saber geométrico consistía en conocer las formas geométricas, lo cual implica una cierta experiencia sobre ellas. Pero dado que en este mundo no hay objetos que correspondan exacta y fielmente a las formas geométricas, resulta que llegamos a su conocimiento a partir de formas aproximadas y parecidas, lo cual es la señal manifiesta de que tal conocimiento es un re-conocimiento, es decir, una *reminiscencia*, un recuerdo de una experiencia anterior en otra vida de nuestra alma, que es inmortal y que de acuerdo con la creencia pitagórica ha transmigrado. Antes de nacer a esta vida, el ser humano ya ha visto todas las cosas, aunque las haya olvidado. Con un poco de esfuerzo a través de la educación, convenientemente interrogado, como hace Sócrates con el esclavo ignorante en el *Menón*, se puede recordar todo, es decir, el alma que entre las diversas encarnaciones reside en el mundo de las formas inteligibles inmortales, alcanza en el aprendizaje el saber preexistente, que no es más que recuerdo. En este aspecto, como en otros muchos, la originalidad de la filosofía platónica es tributaria tanto de la tradición pitagórica como del pensamiento socrático.

Las concepciones platónicas sobre las fuentes del saber, plasmadas en el *Menón*, y en otros diálogos, nos han permitido contestar a la pregunta planteada más arriba: ¿por qué las matemáticas tienen una importancia tan relevante en el pensamiento de Platón?, pues las diversas ciencias matemáticas ocupan una posición privilegiada respecto a todas las demás disciplinas y estudios de la Academia. Además, lo mismo nos explica la importancia de la definición y de la demostración, como elementos característicos y singulares de la actividad matemática, a partir de Platón, que establece un paradigma de actuación en las matemáticas griegas posteriores, que sellado férreamente por Euclides, Arquímedes y Apolonio, nunca ha sido relevado.



10 Las matemáticas de la Academia

"A Platón no le fue extraño ni oculto ninguno de los problemas que preocupaban a los matemáticos de su época. No ignoró ni los descubrimientos de Teodoro, ni las aportaciones de Teeteto a la teoría de los números irracionales y a la de los poliedros regulares, ni, desde luego, los trabajos de Eudoxo, que dominan el pensamiento matemático del siglo IV a.C."

P. H. Michel. *La ciencia helénica: Platón* (en *Historia general de las ciencias*. Orbis. vol. 1, Lib. 1, cap. 3, pág. 277)

Según el testimonio de Proclo, en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, todo el desarrollo de las matemáticas del siglo anterior a Euclides estuvo dominado por la Academia de Platón, a quien describe como alguien que estimuló a sus discípulos a estudiar matemáticas al incluir con mucha frecuencia textos de contenido matemático en sus obras:

"Después de los pitagóricos vivió Platón, que dio a las matemáticas en general, y a la geometría en particular, inmen-

El Comentario *de Proclo*

Este Comentario *es una de las principales fuentes sobre las matemáticas griegas y fue escrito por el filósofo neoplatónico del siglo V d.C. Proclo de Licia, apoyándose en el* Fragmento de Eudemo *–documento sobre historia de las matemáticas encargado por Aristóteles a su discípulo Eudemo–. Se trata de uno de los documentos histórico-críticos más valiosos y excepcionales sobre la historia de la geometría griega y contiene numerosas referencias biográficas y bibliográficas, que son las únicas que conocemos de algunos geómetras anteriores al helenismo.*



PROCLI DIADOCHI
LYCII
PHILOSOPHI PLATONICI
COMMENTARIORVM
A
PATAVII,
Excudebat Gratiosus Perchacinus

Portada del *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides* de Proclo en una edición de 1560.

El texto de Proclo tal vez se componía de apuntes para sus lecciones de geometría en la Academia –que llegó a dirigir– a las que imprimía, como Platón, una orientación filosófica. Proclo escribió, además, amplios comentarios a algunos diálogos de Platón (La República, Timeo y Parménides). *Para sus comentarios críticos Proclo pudo disponer de materiales bibliográficos antiguos, por eso se ha ponderado tanto su labor de transmisión del conocimiento matemático.*

so impulso gracias al celo que desplegó por ellas y del que son testimonio suficiente sus escritos llenos de discursos matemáticos, y que, a cada momento, despiertan el entusiasmo por estas ciencias en aquellos que se entregan a la filosofía".

Platón es el catalizador de casi toda la actividad filosófica y matemática de su época. Según las manifestaciones de Proclo, Platón despertaba un vehemente entusiasmo por las matemáticas en todos los que se entregaban a la reflexión filosófica.

Platón sería el primero en sistematizar las reglas de la demostración rigurosa y en comenzar una ordenación de los teoremas según una jerarquía lógica, iniciando un proceso de organización y estructuración deductiva de las matemáticas que culminaría Euclides con los *Elementos.* La Academia de Platón se planteó ya de forma clara la cuestión de si un problema dado tenía solución o no sobre las bases de las verdades conocidas y de las hipótesis admitidas. No sabemos si Platón empezó a establecer las bases axiomáticas pero lo que si se sabe es que desde Platón la demostración deductiva, a partir de los principios, se consideró necesaria y consustancial con la propia naturaleza de las matemáticas, estableciendo un paradigma eterno en la actuación matemática.

De acuerdo con las declaraciones de Proclo, sobre cuyo contenido coinciden las interpretaciones de los historiadores modernos, Platón y los matemáticos de la Academia ampliaron de forma considerable el acervo matemático, clarificaron algunas definiciones, reorganizaron las hipótesis de partida, rehicieron muchas demostraciones, generalizaron numerosos teoremas, resolvieron una gran cantidad de problemas pendientes, escribieron *Elementos* a base de reordenar el *corpus* geométrico de forma sistemática y jerárquica seleccionando los problemas y teoremas que se toman como elementales (de ahí el nombre de *Elementos*), y lo más importante: discutieron los fundamentos de las matemáticas y se interesaron especialmente por la metodología de la investigación matemáti-

ca, que se benefició considerablemente del *método de análisis*. Todo ello en colaboración y bajo la inspiración, la dirección y la instrucción del maestro Platón, que siempre daba una orientación filosófica a todas las investigaciones.

Entre los matemáticos más eminentes de la Academia debemos citar a Teeteto, Menecmo y Eudoxo. Teeteto realizó importantes contribuciones al estudio y construcción de los poliedros, los llamados *cuerpos platónicos*, de modo que se le atribuye la paternidad de la mayor parte del Libro XIII de los *Elementos* de Euclides. Menecmo, que fue durante un tiempo maestro de Aristóteles y de Alejandro Magno, es el descubridor de las secciones cónicas en relación con el problema de la duplicación del cubo. Eudoxo resolvió, mediante el *axioma de continuidad,* la *teoría de la proporción* y el *método de exhaución*, la primera crisis de fundamentos en la historia de las matemáticas provocada por la aparición de la inconmensurabilidad en el mundo pitagórico. Los matemáticos de la Academia también dieron diversas soluciones a los famosos problemas clásicos de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la construcción de polígonos regulares, problemas seculares, cuya solución definitiva habría de esperar más de dos mil años después de Platón.

11 El *método de análisis*

Para llegar a los objetos inteligibles [de las matemáticas] *el alma se ve forzada a servirse de las hipótesis, pero no caminando hacia el principio, dado que no puede ir más allá de las mismas hipótesis y ha de usar de unas imágenes que son objetos imitados por los de abajo. [...] Este es el método de la geometría y ciencias afines.*

Platón. *La República* (511a)

La imputación a Platón del *método de análisis* se basa en algunos pasajes del *Menón* y de *La República* en relación con ciertos métodos geométricos *por hipótesis* en los que, según Platón, para sus investigaciones los geómetras utilizan elementos desconocidos como si realmente los conocieran. Veamos los textos de Platón de ambos diálogos.

Menón (86e–87a):

Vamos a intentar descubrir las cualidades de una cosa cuya naturaleza desconocemos. [...] Vamos a examinar por hipótesis, en el sentido de los

geómetras, si la virtud se puede enseñar o no. Cuando se les pregunta a los geómetras, por ejemplo, a raíz de una superficie, si tal triángulo puede inscribirse en tal círculo, un geómetra responderá: No se aún si esta superficie se presta a ello; pero creo oportuno, para determinarlo, razonar por hipótesis de la manera siguiente: si se dan tales condiciones, el resultado será éste, y en determinadas otras condiciones será tal otro. Así pues, por hipótesis, puedo decirte lo que ocurrirá respecto de la inscripción del triángulo en el círculo, si será posible o no.

La República (510c):

Los que se ocupan de la geometría, del cálculo y de otras ciencias del mismo género dan por supuestos los números impares y los pares, las figuras, tres clases de ángulos y así todo lo demás, según el objeto de su investigación; que tratan esos objetos como cosas conocidas y que, establecidas una vez esas hipótesis, piensan que no tienen ya por qué dar cuenta de ellas ni a sí mismos ni a los demás, en vista de que son evidentes para todos los espíritus; y, por último, que, partiendo de esas hipótesis, van bajando, por una cadena ininterrumpida de proposiciones, hasta la demostración que se habían propuesto.

Mediante el *análisis* se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta asunción hasta llegar a algo que forma parte de los principios –*hipótesis*–, es decir, uno se remonta de forma regresiva hasta los puntos de partida o siguiendo el curso lógico de los razonamientos se alcanza un resultado cierto por haber sido previamente establecido. Si entonces podemos invertir la secuencia de los pasos anteriores, el resultado –*síntesis*– es una prueba legítima del teorema que había que probar. Así pues, el *análisis* viene a ser un procedimiento sistemático de descubrir *condiciones necesarias* para que un teorema sea cierto, de modo que si por medio de la *síntesis* se muestra que estas condiciones son también *suficientes*, se obtiene una demostración correcta de la proposición.



Dibujo a plumilla de la efigie de Platón tomando como modelo un icono de las estancias del Vaticano.

Aunque los textos aludidos de Platón no son muy aclaratorios de la cuestión, siempre le han sido atribuidas al filósofo, en las lecciones que impartía en la Academia –mejor que en sus escritos–, las bases del *método analítico* como procedimiento metodológico capital para el progreso de las matemáticas y como método pedagógicamente conveniente para el hallazgo de proposiciones que permitirían la verificación de los teoremas, es decir, la obtención de *lemas*; y a este tipo de *análisis* parece referirse Proclo cuando habla del *método platónico.*

Como otras veces, el testimonio de Aristóteles, que convivió con Platón casi veinte años en la Academia y que, por tanto, recibió directamente las lecciones orales y las reflexiones de Platón en sus conversaciones sobre los problemas de las matemáticas, nos acerca a su pensamiento. Así tiene lugar en la *Ética a Nicómaco* (1095a), donde el *análisis* y la *síntesis* son definidos por su recíproca oposición:

> *"No debemos olvidar la diferencia que hay entre los razonamientos que hablan de principios y los que tienden a establecer principios. El mismo Platón se sintió preocupado en este punto y con razón, y buscaba la manera de precisar si el camino que se debía seguir iba hacia los principios o partía más bien de ellos".*

El *análisis* como forma fecunda de procedimiento inventivo ya aparece en los tanteos de los primeros geómetras al intentar coordinar los resultados de sus observaciones. El mismo Proclo nos da a conocer que Hipócrates de Quíos, contemporáneo de Teodoro,

primer maestro de matemáticas de Platón, había usado una forma particular de *análisis* –la *reducción geométrica*–, al reconducir el famoso problema de la duplicación del cubo a la determinación de dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta. Según Proclo:

> *"La apagogé es una reducción de un problema o de un teorema a otro, que si es conocido o determinado, conduce a la solución de la cuestión propuesta.* [....] *Se tuvo a Hipócrates de Quíos como el primero que inventó la reducción geométrica en estas figuras difíciles".*

La más diáfana expresión acerca del *análisis* y la *síntesis* la da Pappus (hacia 325 d.C.) en el Libro VII –llamado el *tesoro del análisis*– de la *Colección matemática*, fuente bibliográfica fundamental para la historia de la geometría griega. En un largo preámbulo Pappus nos relata lo que los antiguos geómetras entienden por *análisis* y *síntesis* (Pappus d'Alexandrie. *La collection mathémathique*. Blanchard. París, 1982. Libro VII, pág. 477):

> *"El análisis es el camino que parte de la cosa buscada, considerada como siendo supuesta conocida, para desembocar por medio de las consecuencias que se derivan, en la síntesis de lo que ha sido supuesto como conocido. En efecto, suponiendo en el análisis que la cosa buscada está ya obtenida, se considera lo que deriva de esta cosa, hasta que volviendo sobre sus pasos se llega a una cosa ya conocida o que entra en el orden de los principios; y se llama este camino análisis en tanto que constituye una inversión de la solución. En la síntesis, al contrario, suponiendo la cosa finalmente percibida por el análisis al haber sido ya obtenida, y disponiendo desde entonces de sus consecuencias y de sus causas en su orden natural, ligando las unas a las otras, se llegará en última instancia a construir la cosa buscada; y esto es lo que nosotros llamamos la síntesis".*

Pappus describe cómo se procede analíticamente para hallar la prueba de un teorema: asumiendo por el momento que el teorema en cuestión es válido o que el problema está resuelto y siguiendo entonces las implicaciones lógicas del teorema o la solución del problema, se llega a alcanzar una solución conocida que es verdadera o falsa. Si se trata de un teorema, de una falsa conclusión resulta la invalidez del teorema, y entonces del mismo *análisis* resulta la refutación del teorema por reducción al absurdo; pero, si la conclusión obtenida a través del *análisis* es verdadera, nada se puede decir de la validez del teorema. Es decir, el método de *análisis* produce una cadena de inferencias que lleva de una premisa de valor verdadero desconocido a una conclusión de valor verdadero conocido; la falsedad de la conclusión implica la de la premisa, pero la verdad de la conclusión no dice nada acerca de la de la premisa, a menos que, como señalaba Platón, uno pueda dar la vuelta a la inferencia. La eficiencia del *análisis* es doble, por una parte abundan los teoremas geométricos que tienen un recíproco válido, y por otra, cuando el recíproco de un teorema no es válido puede llegar a serlo añadiendo ciertas condiciones suplementarias, que eran llamadas por los griegos *diorismos*. Gran parte de la investigación geométrica consistía en la búsqueda del *diorismo* adecuado para poder invertir una inferencia. Una vez que se ha hallado el *diorismo*, la inferencia invertida constituye una *síntesis*, es decir la rigurosa demostración del teorema.

Las considerables dificultades inherentes a la inversión de inferencias propiciaron que los grandes matemáticos griegos se expresaran en sus obras mediante demostraciones sintéticas formales de los resultados que habían obtenido aplicando el método de *análisis*. Es decir, el *análisis geométrico* griego era el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero en presencia de la demostración sintética, alcanzada tras el *análisis*, cualquier *análisis* era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos. Esto sucede



Página de la *Colección matemática* de Pappus en un manuscrito del siglo X de la colección del Vaticano (Vat. gr. 218 fol. 40 math08a NS.05)

La Colección matemática de Pappus es una fuente esencial para la historia de la geometría griega porque compila numerosos trabajos matemáticos perdidos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Aristeo y Eratóstenes sobre geometria superior no incluidos en los *Elementos de Euclides*. Además, Pappus nos relata las vías que seguía la investigación geométrica, oculta en los grandes tratados clásicos debido a su estilo sintético. Por eso la obra de Pappus fue muy valorada en el Renacimiento y tuvo una incidencia decisiva en la evolución de la geometría griega hacia la geometría analítica de Descartes.

en las grandes obras clásicas como los *Elementos* de Euclides o las *Cónicas* de Apolonio y también en las obras de Arquímedes, muy ponderadas por los matemáticos posteriores, sobre todo a partir del Renacimiento, pero también, a veces, criticadas –como hace Descartes en la Regla IV de las *Reglas para la dirección del espíritu* (AT.X.373-377)– porque ocultaban los métodos de descubrimiento.

12 Los poliedros de Teeteto y el Libro XIII de Euclides

"La culminación de los Elementos de Euclides con la construcción de los poliedros responde al interés especial que mostraban los filósofos platónicos por todo lo que atañe a los poliedros regulares".

F. Klein. *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Geometría* (Biblioteca matemática, 1931, pág. 260)

Diversos comentaristas griegos y la mayor parte de los historiadores de la matemática atribuyen el contenido del Libro XIII de los *Elementos* de Euclides –dedicado casi exclusivamente al estudio sistemático de las propiedades de los cinco sólidos regulares– a Teeteto, uno de los más prolíficos matemáticos platónicos, venerado por el propio Platón como héroe de la guerra del Peloponeso.

Puesto que Euclides debió formarse en el ambiente platónico de la Academia de Atenas, tuvo que vivir la fascinación de sus miembros por los cinco poliedros regulares hasta el punto de hacer de ellos el punto culminante de un tratado tan brillante como los

Elementos. De hecho Proclo, en su *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides*, escribe:

> "*Euclides era platónico,* [...], *mejoró los trabajos de Teeteto,* [...], *se propuso como objetivo final del conjunto de sus Elementos la construcción de los cinco poliedros regulares*".

El tratamiento que da Euclides a los poliedros regulares es especialmente importante para la historia de la matemática porque contiene el primer ejemplo de un teorema fundamental de clasificación. Euclides introduce uno por uno en el Libro XI los diversos poliedros regulares (salvo el tetraedro, pues lo considera como una pirámide triangular) en las definiciones XI.12 (pirámide), XI.25 (cubo), XI.26 (octaedro), XI.27 (icosaedro), XI.28 (dodecaedro) de los *Elementos* después de definir previamente el ángulo sólido.

- *Definición XI.11:* Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie respecto a todas las líneas. O dicho de otra manera: Un ángulo sólido es el que está comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano
- *Definición XI.12:* Una *pirámide* es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.
- *Definición XI.25:* Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales.
- *Definición XI.26:* Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.
- *Definición XI.27:* Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.
- *Definición XI.28:* Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.

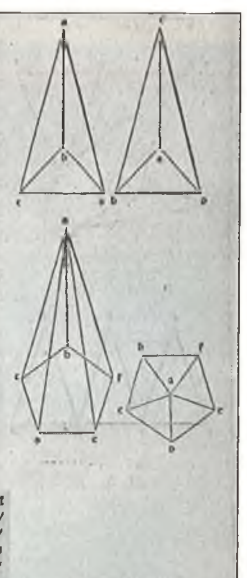
La construcción de Teeteto de los poliedros regulares pudo ser una evidente generalización al espacio de los mosaicos del

LIBER XI

Propositio .21.

Omnis angulus solidus quatuor rectis agulis minor esse probatur.

Anguli solidi quantitas ex angulorum superficialium ipsum solidum continentium quantitate determinatur: hac ergo .21. propositione taliter proponit quoque quoslibet superficiales angulos solidum quemlibet continentes pariter acceptos quatuor rectis angulis esse minores. Sit enim triangula piramis a.b.c.d. cuius supremus angulus cum possit esse quilibet suorum angulorum hic tamen sit .a. de quo dico quod tres superficiales anguli ipsum .a. continentes sint minores quatuor rectis. Constat enim ex .32. primi .9. angulos trium triangulorum hanc piramidem circumstantium et ipsi sunt .a.b.c.a.c.d.a.d.b. esse equales sex angulis rectis: de tribus autem angulis basis eius que est triangulus .b.c.d. constat quoque per eandem quod ipsi sunt equales duobus rectis. cum igitur sex anguli trium triangulorum predictorum hanc nostram piramidem de mine supremo angulo dispartamus circumdantium: qui inquam sex anguli cum tribus angulis basis reliquos tres angulos solidos piramidis continent: sint ex premissa ter assumpta maiores tribus angulis basis: sequitur ipsos sex angulos esse maiores duobus rectis: ex nona igitur angulis trium triangulorum piramidem circumdantium bis sex angulis demptis erunt ex comuni scientia reliqui tres et ipsi sunt qui constituunt solidum angulum .a. minores .4. rectis. Si autem angulus .a. supremus in assumpta piramide pluribus angulis superficialibus quam tribus continea[tur] quod erit secundum multitudinem angulorum sue basis: cum igitur omnes anguli omnium triangulorum ipsam piramidem circumdantium pariter accepti sint ex .32 primi tot rectis angulis equales quantus est numerus angulorum sue basis duplicatus: eo quod tot necesse est esse triangulos piramidem circumdantes quot fuerit anguli sue basis. Cumque omnes anguli sue basis sint tot rectis angulis equales quantus est numerus angulorum suorum duplicatus: demptis inde .4. ut in .32. primi demonstratum est. Cumque igitur omnes anguli triangulorum piramidem circumdantium qui super latera basis ipsius piramidis consistunt pariter accepti sint maiores omnibus angulis basis pariter acceptis ut evidenter constat ex premissa toties quot angulos basis habuerit repetita, adhuc necessario sequitur ex comuni scientia superficiales angulos solidum angulum .a. continentes pariter acceptos esse minores quatuor rectis: eo inquam minores quo omnes anguli trigonorum piramidem circumdantium qui super latera basis statute piramidis consistunt excedunt omnes angulos basis pariter acceptos.



La proposición XI.21 sobre ángulos sólidos en la edición de Ratdolt de los *Elementos* de Euclides (Venecia, 1482). Ejemplar de la Biblioteca del monasterio de San Millán de Yuso (La Rioja).

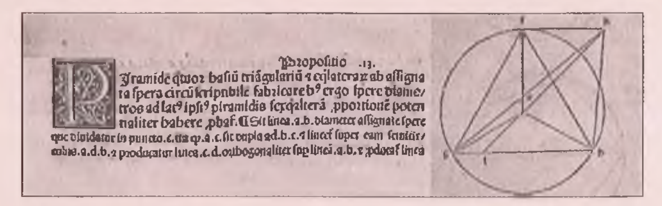
plano que habían estudiado los pitagóricos. El estudio geométrico aplicado a los mosaicos puede extenderse de forma sensiblemente similar a los poliedros con la necesaria modificación de que la concurrencia de polígonos regulares en un vértice da un ángulo sólido, de modo que según la Proposición XI.21 de los *Elementos* de Euclides:

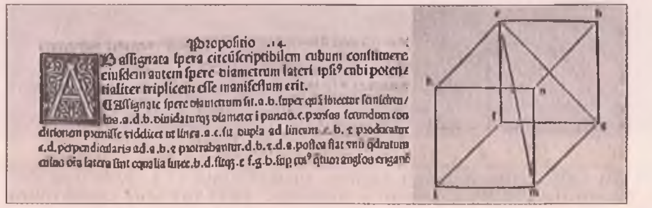
> "*Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores que cuatro rectos*".

Es decir, la suma de los ángulos de los polígonos que concurren en el vértice de un poliedro es menor de 360°.

El objeto de los teoremas de Teeteto del Libro XIII de Euclides es el de inscribir cada uno de los poliedros regulares en una esfe-

La construcción de los poliedros en el Libro XIII de los Elementos





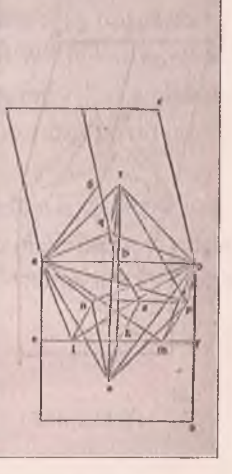


Fragmentos de las proposiciones de Euclides sobre los poliedros: construcción e inscripción en una esfera del tetraedro (XIII.13), el hexaedro (XIII.14) y el octaedro (XIII.15). Edición de Ratdolt de los *Elementos* de Euclides. Ejemplar de la Biblioteca del monasterio de San Millán de Yuso (La Rioja).

Propositio .16.



Propositio .17.



Fragmentos de las proposiciones de Euclides sobre los poliedros: construcción e inscripción en una esfera del icosaedro (XIII.16) y del dodecaedro (XIII.17). Edición de Ratdolt de los *Elementos* de Euclides. Ejemplar de la Biblioteca del monasterio de San Millán de Yuso (La Rioja).

ra, construcciones que Euclides, con una extraordinaria habilidad geométrica, va obteniendo de forma sucesiva en las proposiciones XIII.13–XIII.17, hallando la razón de la arista del sólido al diámetro de la esfera circunscrita:

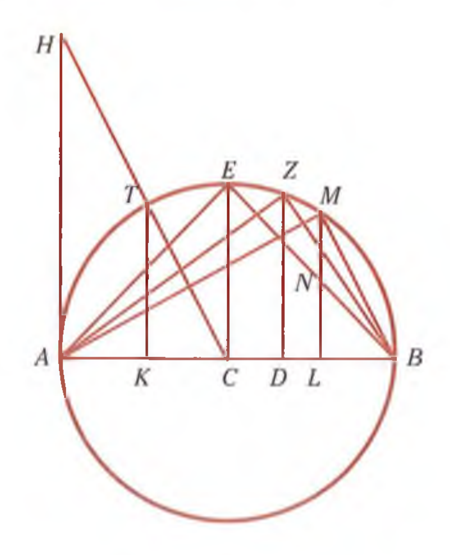
- *Proposición XIII.13:* Construir una pirámide inscrita en una esfera dada y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado de la pirámide.
- *Proposición XIII.14:* Construir un octaedro inscrito en una esfera [...], y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro.
- *Proposición XIII.15:* Construir un cubo inscrito en una esfera [...], y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo.
- *Proposición XIII.16:* Construir un icosaedro inscrito en una esfera [...], y demostrar que el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada *menor.*
- *Proposición XIII.17:* Construir un dodecaedro inscrito en una esfera [...], y demostrar que el lado del dodecaedro es la recta sin razón expresable llamada *apótoma.*

Los resultados anteriores se sintetizan en la siguiente tabla, que muestra la razón de la arista de cada sólido platónico al radio R de la esfera circunscrita:

Poliedro	***Proposición***	***Arista***
Tetraedro	Euclides. XIII.13	$\frac{2}{3}R\sqrt{6}$
Cubo	Euclides. XIII.14	$\frac{2}{3}R\sqrt{3}$
Octaedro	Euclides. XIII.15	$R\sqrt{2}$
Icosaedro	Euclides. XIII.16	$\frac{R}{5}\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}$
Dodecaedro	Euclides. XIII.17	$\frac{R}{3}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$

El libro XIII de los *Elementos* y con él toda la brillante obra de Euclides culmina con la última proposición, que ocupa el lugar 465, la XIII.18:

> *"Construir los cinco poliedros regulares inscritos en la misma esfera y comparar las aristas de las cinco figuras"*.



Euclides traza la figura tomando:

AB = diámetro de la esfera

$$AC = CB$$
$$AD = 2DB$$
$$AH = AB$$
$$CL = KC$$

Y demuestra, paso a paso, utilizando numerosas proposiciones anteriores (en particular las de la *sección áurea*) que:

AZ es la arista *t* del tetraedro
BZ es la arista *c* del cubo
BE es la arista *o* del octaedro

MB es la arista *i* del icosaedro

NB es la arista *d* del dodecaedro

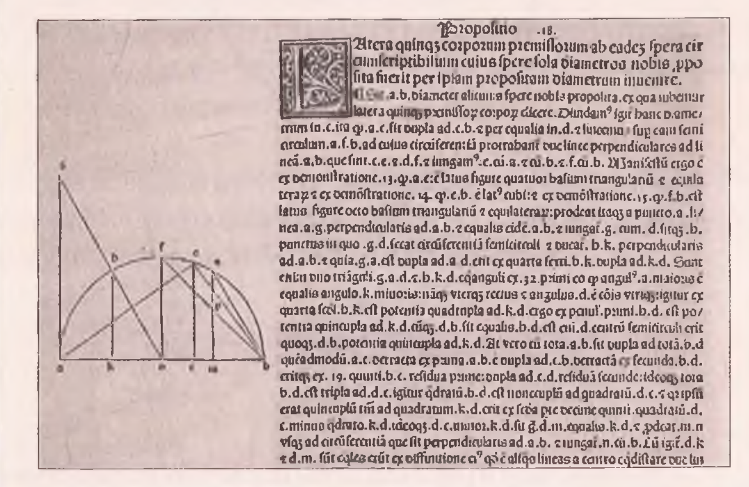
Siendo las relaciones entre ellas:

$$t^2 = (4/3)\,o^2 = 2c^2$$

$$o^2 = (3/2)\,c^2$$

Existen cinco y solo cinco poliedros regulares

El texto de Euclides de la última proposición (XIII.18) de los Elementos



Propositio .18.

Latera quinque corporum premissorum ab eadem spera circumscriptibilium cuius spere sola diametros nobis proposita fuerit per ipsam propositam diametrum inuenire.

Sit .a.b. diameter alicuius spere nobis proposita. ex qua iubemur latera quinque premissorum corporum elicere. Diuidam igitur hanc diametrum in .c. ita quod .a.c. sit dupla ad .c.b. et per equalia in .d. et describam super eam semicirculum .a.f.b. ad cuius circumferentiam protraham duas lineas perpendiculares ad lineam .a.b. que sint .c.e. et .d.f. et iungam .e. cum .a. et cum .b. et .f. cum .b. Manifestum ergo ex demonstratione .13. quod .a.e. est latus figure quatuor basium triangularum et equilaterarum et ex demonstratione .14. quod .e.b. est latus cubi: et ex demonstratione .15. quod .f.b. est latus figure octo basium triangularum et equilaterarum: producatur itaque a puncto .a. linea .a.g. perpendicularis ad .a.b. et equalis eidem .a.b. et iungatur .g. cum .d. sitque .h. punctus in quo .g.d. secat circumferentiam semicirculi et ducatur .h.k. perpendicularis ad .a.b. et quia .g.a. est dupla ad .a.d. erit ex quarta sexti .h.k. dupla ad .k.d. Sunt enim duo trianguli .g.a.d. et .h.k.d. equianguli ex .32. primi eo quod angulus .a. maioris est equalis angulo .k. minoris: namque uterque rectus et angulus .d. est communis utrique: igitur ex quarta secundi .h.k. est potentia quadrupla ad .k.d. ergo ex penultima primi .h.d. est potentia quincupla ad .k.d. cumque .d.b. sit equalis .h.d. cum .d. centrum semicirculi erit quoque .d.b. potentia quincupla ad .k.d. At vero cum tota .a.b. sit dupla ad totam .b.d. quemadmodum .a.c. detracta ex prima .a.b. est dupla ad .c.b. detractam ex secunda .b.d. eritque ex .19. quinti .b.c. residua prime dupla ad .c.d. residuam secunde: ideoque tota .b.d. est tripla ad .d.c. igitur quadratum .b.d. est noncuplum ad quadratum .d.c. et quia ipsum erat quincuplum eius ad quadratum .k.d. erit ex secunda parte decime quinti quadratum .d.c. minus quadrato .k.d. ideoque .d.c. minor .k.d. sit .d.m. equalis .k.d. et producatur .m.n. usque ad circumferentiam que sit perpendicularis ad .a.b. et iungatur .n. cum .b. Cum igitur .d.k. et .d.m. sint equales erunt ex diffinitione qua est aliquas lineas a centro equidistare due lin

Fragmento de la última proposición de los *Elementos* (XIII.18). Edición de Ratdolt de los *Elementos* de Euclides. Ejemplar de la Biblioteca del monasterio de San Millán de Yuso (La Rioja).

Además, la arista *i* del icosaedro es mayor que la arista *d* del dodecaedro.

La última proposición de *Los Elementos* de Euclides acaba, a su vez, con el teorema de clasificación de los poliedros, punto culminante de la obra de Euclides:

"Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por [figuras] equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares [colocados] en un solo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos [XI.21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el [ángulo] del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad.

Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por [figuras] equiláteras y equiangulares. Q.E.D."

"Ninguna otra figura, además de estas cinco, se puede construir con polígonos equiláteros y equiángulos entre sí".

La demostración actual se basa en la resolución de una inecuación en números enteros, la que resulta de la proposición XI.21:

$$\frac{m(n-2)\cdot 180^\circ}{n} < 360^\circ$$

si concurren en un vértice m polígonos regulares de n lados. Esta inecuación es equivalente a $(m-2)\cdot(n-2) < 4$, que da como soluciones geométricas:

- para $m = 3$: $n = 3$ (tetraedro); $n = 4$ (cubo); $n = 5$ (dodecaedro)
- para $m = 4$: $n = 3$ (octaedro)
- para $m = 5$: $n = 3$ (icosaedro)

"En la proposición 465 y última de los Elementos, Euclides demostró que la geometría había dictaminado que el número de tales bellas figuras [los sólidos platónicos] eran cinco, ni más, ni menos. [...]. Ninguna cantidad de esfuerzo o ingenio produciría un mayor número de estas notables figuras.

Con esto termina el libro de los Elementos. Fue, y ha permanecido así durante 2.300 años, un documento matemático insuperado. Como toda gran obra maestra, puede ser leído una y otra vez, suministrando nuevos aspectos del genio de su creador. Aún hoy, estos viejos escritos constituyen una fuente ilimitada de goce para los que disfrutan con la ingeniosidad y el artificio de un argumento matemático elegante".

W. Dunham. *Viaje a través de los genios*. Pirámide. pp. 113-114.

13 Las cónicas de Menecmo y la duplicación del cubo

"*En su afán por describir el orden absoluto del cosmos* [a través de las matemáticas], *Platón acogió en su Academia a varios de los matemáticos más celebres de su tiempo, y bajo su égida tuvieron lugar enormes avances en el dominio de las matemáticas y de todo cuanto hoy en día designamos bajo el nombre genérico de ciencias. Y todo ello como parte indisoluble de la filosofía*".

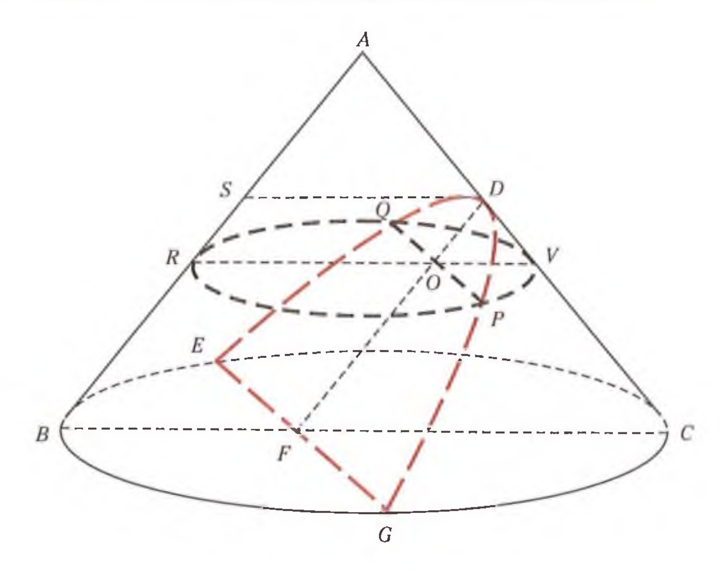
B. Magee. *Historia de la filosofía*
(Blume, 1988, cap. 1, pág. 28)

La tradición atribuye a Menecmo (hacia 350 a.C.), de la Academia platónica, maestro de Aristóteles y Alejandro Magno, la introducción de las secciones cónicas, es decir, el descubrimiento de las curvas que después recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola, la llamada *triada de Menecmo*. Veremos que el descubrimiento fue un feliz hallazgo en relación con el problema délico de la duplicación del cubo. Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos

de tres tipos, según que el ángulo en el vértice fuera agudo, recto u obtuso.

Partiendo de un cono circular recto de una sola hoja con ángulo recto en el vértice, Menecmo descubrió que al cortar el cono por un plano perpendicular a una de sus generatrices, la curva intersección es tal que su *ecuación* (utilizando un anacronismo en términos de geometría analítica moderna) puede escribirse en la forma $y^2 = lx$, donde l es una constante que depende exclusivamente de la distancia del vértice del cono al plano de la sección. Ignoramos como obtuvo exactamente Menecmo esta propiedad, pero como quiera que depende solamente de algunos teoremas de geometría elemental, Menecmo utilizaría los conocimientos geométricos que serían familiares a los matemáticos de la Academia platónica.

Sea pues *ABC* el cono y sea *EDG* la curva obtenida al cortarlo por un plano perpendicular en el punto *D* a la generatriz *ADC* del cono. Sea *P* un punto cualquiera de la curva sección y un plano horizontal que corta al cono en la circunferencia *PVQR*, siendo *Q* el otro punto de intersección de la curva sección con esta circunferencia.



Por razones de simetría, resulta que los segmentos *PQ* y *RV* son perpendiculares en el punto *O*, de modo que *OP* es la media proporcional entre *RO* y *OV*. Por tanto, $OP^2 = RO \cdot OV$.

Ahora, de la semejanza de los triángulos $\triangle OVD$ y $\triangle BCA$ se tiene:

$$OV/DO = BC/AB$$

y de la semejanza de los triángulos $\triangle SDA$ y $\triangle ABC$ se tiene:

$$SD/AS = BC/AB$$

Tomando $OP = y$; $OD = x$, como *coordenadas* del punto *P*, se tiene:

$$y^2 = RO \cdot OV$$

de modo que sustituyendo:

$$y^2 = OP^2 = RO \cdot OV = SD \cdot OV =$$
$$= AS \cdot (BC/AB) \cdot DO \cdot (BC/AB) = ([AS \cdot BC^2]/AB^2) \cdot x$$

Como los segmentos *AS*, *BC* y *AB* son los mismos para todos los puntos de la curva *EQDPG*, podemos escribir la *ecuación de la curva* o *sección del cono rectángulo* en la forma:

$$y^2 = lx$$

donde *l* es una constante que más tarde se llamaría el *latus rectum*.

De una forma totalmente análoga para conos con ángulo agudo y obtuso en el vértice, Menecmo obtendría expresiones de la forma:

$y^2 = lx - (b^2/a^2) \cdot x^2$ *sección de cono acutángulo*

$y^2 = lx + (b^2/a^2) \cdot x^2$ *sección de cono obtusángulo*

donde *a* y *b* son constantes y el plano de corte es perpendicular, en ambos casos, a una generatriz.

Como vemos, hay una gran similitud entre estos desarrollos de Menecmo con expresiones equivalentes a ecuaciones y la utilización de coordenadas, lo que ha inducido a algunos historiadores a afirmar que este geómetra ya conocía ciertos aspectos de la geometría analítica. De hecho, ignorando el lenguaje de ésta se hace difícil explicar el hallazgo de Menecmo.

Las cónicas de Menecmo tienen su origen en los intentos de Hipócrates de Quíos (hacia 400 a.C.) de resolución del problema clásico de la duplicación del cubo mediante la interpolación de dos medias proporcionales.

Sea un cubo de arista a. A partir de la proporción continua:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

resultado de interpolar dos medias proporcionales entre a y su doble $2a$, se obtienen las parábolas:

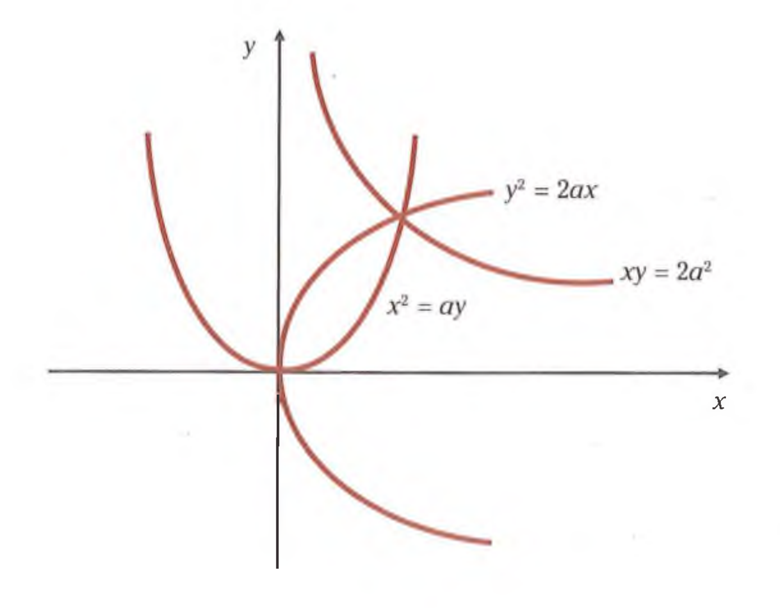
$$x^2 = ay$$
$$y^2 = 2ax$$

y la hipérbola equilátera:

$$xy = 2a^2$$

Tanto la intersección de las dos parábolas como la intersección de una de las parábolas y la hipérbola nos da $x^3 = 2a^3$, es decir, la arista del cubo de volumen doble.

Lo que en nuestro lenguaje geométrico analítico realizamos utilizando las ecuaciones de las cónicas, Menecmo lo hallaría mediante la construcción de puntos de intersección de las cónicas obtenidas, desplazando convenientemente el plano de corte con el cono a fin de hallar cónicas con *latus rectum* conveniente al objetivo propuesto.



Las cónicas se definen actualmente como lugares de puntos en el plano para los que las distancias a una recta –directriz– y a un punto –foco– están en una determinada razón –excentricidad–. Esta definición se traslada de forma muy simple al lenguaje algebraico de ecuaciones de nuestra geometría analítica y, además, la trigonometría permite mediante la rotación de ejes pasar fácilmente de la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes a la referida a sus asíntotas. De modo que realmente impresiona la extraordinaria habilidad de Menecmo descubriendo esta familia de curvas sin utilizar ni los instrumentos ni el simbolismo algebraicos. Pero no sólo esto, sino que, independiente de su origen plano o estereométrico, Menecmo fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en expresiones geométricas básicas (equivalentes a nuestras *ecuaciones*) que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas, que serían

plasmadas por Apolonio (262–190 a.C.) en los primeros libros de las *Cónicas*. Es bajo esta visión sobre el trabajo de Menecmo que algunos historiadores modernos (Zeuthen, Coolidge, Loria y Heath) reclaman para los griegos, empezando por Menecmo, la paternidad de la geometría analítica, al establecer como la esencia de esta rama de las matemáticas el estudio de los lugares por medio de *ecuaciones*.

Las *Cónicas* de Apolonio

Las Cónicas *de Apolonio –en ocho libros, de los que conservamos siete gracias a los trabajos de Thabit ibn Qurra (hacia 856 d.C.) y de Halley (1656-1742)– es una de las obras cumbres de las matemáticas griegas, que extiende y generaliza todo lo que sobre cónicas había descubierto el matemático platónico Menecmo y habían desarrollado Euclides y otros geómetras.*

Gracias a este texto, a Apolonio se le llamó el gran geómetra, *porque si entre los matemáticos griegos Euclides representa el maestro sistematizador y Arquímedes el genio investigador, el tercer talento del helenismo, Apolonio de Perga, personifica el virtuosismo geométrico.*



Apolonio



Frontispicio de la edición de E. Halley de las *Cónicas* de Apolonio (1710). En la base aparece un texto en latín de gran valor emblemático y metafórico sobre el significado de la geometría como ciencia del espíritu (es por tanto un texto de naturaleza platónica), tomado del epígrafe primero del prefacio del Libro VI de *De Architectura* de Vitrubio. Se trata de una exclamación promovida por la súbita presencia ante unos náufragos, como evidencia de la presencia de civilización, de figuras sobre hipérbolas de Apolonio, que reza en estos términos:

«Aristipo, filósofo socrático, habiendo naufragado en el mar de Rodas, y habiendo observado en la playa dibujos con diseños geométricos, se dice que exclamó ante sus compañeros: estamos de buena esperanza ya que veo huellas de hombre».

Debemos aquilatar, no obstante, ciertas afirmaciones en torno a elementos precursores de la geometría analítica, porque al señalar tales atribuciones, más o menos fundadas o infundadas, siempre nos encontraremos con las serias limitaciones impuestas por el carácter geométrico-sintético de la geometría griega y por la ausencia de un álgebra simbólica en sentido algorítmico, que es un componente ineludible de una verdadera geometría analítica general y que, a fin de cuentas, es lo que permite la real y mutua correspondencia entre curvas y ecuaciones.

Durante más de cien años las curvas introducidas por Menecmo se denominarían a partir de la descripción trivial de la forma en que habían sido descubiertas, es decir, mediante las perífrasis *sección* (perpendicular a una generatriz) *de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo* para la elipse, parábola e hipérbola, respectivamente.

Fue Apolonio, en las *Cónicas*, quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, lo cual era un paso importante en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica las dos ramas de la hipérbola.

Además, siguiendo probablemente una sugerencia de Arquímedes, Apolonio acuñó para la posteridad los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola* para las secciones cónicas, términos que no eran nuevos, sino que procedían del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas del método de *aplicación de las áreas* que aparece en el Libro II de los *Elementos* de Euclides.

14 La crisis de los inconmensurables

"La principal contribución de Platón a la ciencia, en opinión de Popper, nace de su profunda comprensión del problema de los irracionales y su consiguiente sustitución de las concepciones aritméticas del pitagorismo por una concepción geométrica".

W. Guthrie. *Historia de la filosofía griega* (1990. Vol. 5. pág. 298)

La grandeza del teorema de Pitágoras y la belleza del pentagrama místico pitagórico –generador de la sección áurea como razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular– fueron dos de los tópicos más relevantes de la escuela pitagórica pero se convirtieron en dos caballos de Troya para la geometría griega porque llevaban en su interior el germen de la profunda crisis de la comunidad pitagórica donde aparecieron. Según J. Babini (Arquímedes: *El Método*. Eudeba, Buenos Aires, 1966, pág. 15):

"El descubrimiento pitagórico de los irracionales mostró su incompatibilidad con su metafísica [...]. *La inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado planteaba a los*

pitagóricos una tremenda alternativa: de mantener su metafísica, mutilaban la geometría; de mantener la geometría anulaban su metafísica".

Los diálogos de Platón informan que la comunidad matemática griega se vio gravemente sofocada por un descubrimiento que prácticamente demolía la base de la fe pitagórica en los números enteros. Los pitagóricos, que habían considerado como núcleo dogmático de su filosofía que *los números son la esencia del universo*, encuentran que las consecuencias de su principal *teorema*, llamado de Pitágoras, y su querencia a la sección áurea, patente en el pentagrama místico que era su símbolo de identificación, refutan los fundamentos de su doctrina, que les había llevado a establecer un paralelismo entre el concepto numérico y la representación geométrica. En efecto, el cuadrado, que es una de las figuras geométricas más simples, proporciona un terrible ente geométrico, en el que hay un segmento, la diagonal, que no es conmensurable con otro segmento, el lado; es decir, no hay un submúltiplo de ambos, la diagonal y el lado, que pueda tomarse como unidad, para medir a ambos segmentos. Igualmente sucede entre la diagonal y el lado en el emblemático pentágono regular. La creencia de que los números podían medirlo todo era una simple ilusión. Así se eliminaba de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y aparecía algo muy grave: quedaban desautorizadas todas las pruebas pitagóricas de los teoremas geométricos que utilizaban proporciones.

El gran historiador de la matemática Howard Eves, en su obra en dos volúmenes *Great Moments in Mathematics* (The Math. Assoc. of America, Maine, 1977) escribe (vol. 1, pág.53):

"El descubrimiento de números irracionales y magnitudes inconmensurables provocó una considerable consternación en las filas pitagóricas al dar un golpe mortal a su filosofía que dependía de los números enteros. [...] ¿Cómo puede ser que

el número $\sqrt{2}$ *dependa de números enteros y no pueda expresarse como razón de dos de ellos? El sentido común y la intuición resultan contrariados por la contrapartida geométrica del hallazgo: existen segmentos que no pueden ser medidos por una unidad común. Pero toda la teoría de la proporción pitagórica y de figuras semejantes se basaba en esta presunta obvia asunción, de modo que una extensa parte de la geometría pitagórica quedaba invalidada de repente. Se precipitó una seria crisis de fundamentos en la matemática. Tan grave fue el escándalo lógico que se desplegaron enormes esfuerzos por mantener el asunto en secreto y una terrible leyenda emergió sobre el que lo reveló".*

La cosmovisión pitagórica permite entender la magnitud de la conmoción que debió suponer para el pitagorismo la aparición del inconmensurable, que puede calibrarse por la leyenda que relata un viejo escolio –atribuido a Proclo– del Libro X de los *Elementos* de Euclides:

"Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales, perecería en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas".

En el mismo tono apocalíptico escribe Jámblico (*Vida pitagórica*. XXXIV, 246-247, pág.141):

"Se dice que primero que reveló la naturaleza de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad a los indignos de participar de tales conocimientos fue aborrecido [por la comunidad pitagórica] *hasta el punto de que no sólo lo expulsaron de la vida y de la vivienda en común, sino que incluso le erigieron*

una tumba como si él, que había sido una vez compañero, hubiese abandonado la vida entre los hombres. [...] Otros afirman que la divinidad se enojó contra quien divulgó la doctrina de Pitágoras, pereciendo como un impío en el mar por sacrílego al haber revelado la doctrina de los números irracionales y la inconmensurabilidad".

La aparición del irraccional

Para el pitagórico, toda la naturaleza se regía por un orden aritmético, basado en el número entero como instrumento de intelección del mundo. La llegada del inconmensurable causa un disturbio radical en el orden numérico que resquebraja los cimientos aritméticos de la filosofía pitagórica.

La diagonal del cuadrado de lado unidad debía ser considerada como número si no queremos negar la validez del teorema de Pitágoras, lo que contradice la cosmovisión pitagórica fundamentada en los enteros. Demostrar el carácter informulable (alogon, *que está fuera de la inteligibilidad) de magnitudes fáciles de construir y cuya existencia espacial resultaba evidente, era poner fin a un gran sueño de aritmética universal.*

La aparición del irracional –no expresable mediante razones– supone la terrible y espantosa emergencia de la sinrazón. El inconmensurable no sólo quiebra lo inmediato, es decir, la aritmética y la geometría –el pitagorismo había establecido una exacta identificación entre número y magnitud, entre el pensamiento aritmético y la realidad natural concreta–, sino también la ciencia en general y la filosofía, al alterar sus cimientos aritméticos, que eran principios racionales basados en el número entero.

El descubrimiento de la inconmensurabilidad marca un hito en la historia de la geometría porque no es algo empírico sino puramente teórico. Su aparición señaló el momento más dramático no sólo de la geometría pitagórica sino de toda la geometría griega. Por eso, escribe O. Spengler en *La decadencia de Occidente* (cap. I: "El sentido de los números", Austral, 1998, pág. 152):



Portada de la *Aritmética* de F. Calandri (Florencia, 1492) representando a Pitágoras como maestro de aritmética.

El descubrimiento de los inconmensurables es un reto lanzado por la naturaleza a la aritmética que refuta la creencia pitagórica en la omnipotencia de los números. La súbita emergencia de la inconmensurabilidad sometió el pensamiento pitagórico a un doble desafío, uno filosófico, ya que la irracionalidad atentaba contra el sincretismo aritmético-físico que establecía la preeminencia del número entero como esencia del cosmos, y otro matemático, ya que a partir de entonces en geometría era imposible medir siempre con exactitud y los inconmensurables exigían la reconstrucción de todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones.

"Para el alma antigua el principio de lo irracional, esto es, la destrucción de la serie estatuaria de los números enteros, representantes de un orden perfecto del mundo, fue como un criminal atentado a la divinidad misma. [...]. *La transformación de la serie discontinua de los números en una serie continua, pone en cuestión no sólo el concepto antiguo del número, sino hasta el concepto del mundo antiguo".*

Muchos historiadores plantean la emergencia de lo inconmensurable entre la debacle filosófica que supuso para el pitagorismo y la riqueza que aportó a la geometría griega. Así K. von Fritz, uno de los más profundos estudiosos de la cuestión, escribe (en "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum". *Annals of Mathematics* 46, 1945. pp. 242, 260):

"El descubrimiento de la inconmensurabilidad es uno de los más asombrosos y trascendentales logros de la primitiva matemática griega [...]. *El hallazgo debió provocar una enorme impresión en los círculos pitagóricos porque de golpe destruía la creencia de que todo podía ser expresado en términos de números enteros, lo que constituía la base de toda la filosofía pitagórica".*

Asimismo, E. Colerus escribe (en *Breve historia de las matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972. Vol. 1, cap. 1. pp. 29, 30):

"El sensacional e indeseado descubrimiento de los irracionales, que parecía obra de espíritus malignos destinada a destruir un sueño aritmético maravilloso, abriría más tarde el camino de vertiginosos descubrimientos matemáticos. [...]. El *presunto castigo divino para quien divulgó el secreto de los irracionales es la más específicamente helénica de las leyendas".*

La aparición del inconmensurable fue, con gran probabilidad, lo que imprimió a la matemática griega un cambio de rumbo que la

convertiría en la obra de ingeniería geométrico-deductiva plasmada en los *Elementos* de Euclides. En efecto, la imposibilidad de calcular exactamente la diagonal del cuadrado en función del lado, es decir, la imposibilidad numérica de resolver el problema de la duplicación del cuadrado obligaba a hacer algo distinto. El espíritu griego no se arredrará ante la dificultad y pasará al ataque. Renunciando a la exactitud aritmética y trascendiendo lo empírico replanteará el problema soslayando la presencia temible e inexorable del infinito mediante la construcción geométrica. La incalculabilidad aritmética de ciertas medidas, pronto de la casi generalidad de las medidas, ya que los inconmensurables aparecían en otros muchos campos de la geometría, por ejemplo, en la relación entre el lado y la altura del triángulo equilátero o entre la circunferencia y el diámetro (que Aristóteles comenta en su *Metafísica*, 983a), trajo la primera crisis de fundamentos en la historia de las matemáticas pero fue también la cuna de la geometría griega a través de la emergencia de la demostración, uno de los componentes esenciales del *milagro griego* en matemáticas.

En efecto, una de las cuestiones más interesantes de la historia de las matemáticas, aparecida en el horizonte pitagórico y que de forma definitiva se consolida en la Academia platónica es el problema de la inconmensurabilidad como origen de la aparición de la demostración.

Es absolutamente imposible constatar de forma perceptiva la inconmensurabilidad sobre una figura, es decir, no es comprobable de forma empírica, sólo de forma teórica, a través de un acto intelectual puro. Ninguna verificación geométrico–inductiva puede convencer de que no siempre dos segmentos tienen una parte alícuota común. La inconmensurabilidad es un fenómeno que sólo puede concernir a los entes matemáticos ideales –en el sentido platónico– y sólo puede ser objeto de demostración, es decir, que implica la existencia de demostración, a diferencia de otros resultados como el teorema de Pitágoras para el que hay cientos de prue-

bas visuales que *muestran* su validez. Por extrapolación a todas las matemáticas del fenómeno de la inconmensurabilidad, intrínsecamente vinculado, como vemos, a la demostración, ésta será a partir de entonces quien dará carta de naturaleza a esta ciencia. Así pues, a partir del descubrimiento de los inconmensurables, la demostración deductiva, con base en los principios, se consideró necesaria y consustancial con la propia naturaleza de las matemáticas, que, bien asentadas en el idealismo platónico, renuncian a la experiencia física y a los datos aportados por los sentidos como base del conocimiento y establecen un arquetipo de actuación en matemáticas que nunca ha sido sustituido hasta ahora.

Las circunstancias concretas que rodearon el primer reconocimiento de la existencia de los inconmensurables son tan desconocidas como la fecha en que tuvo lugar el descubrimiento. Los análisis de las escasas fuentes históricas de la geometría griega dieron lugar en la Antigüedad a leyendas como las relatadas por Proclo y Jámblico, y en el siglo pasado los historiadores P. Tannery, H. G. Zeuthen, T. Heath, B. L. van der Waerden, S. Maracchia, W. Knorr, C. Eggers, R. Mondolfo, K. von Fritz, C. Boyer, y otros, han establecido diversas teorías polémicas y cronologías al respecto.

Aunque Proclo, en su famoso *Comentario al Libro I de Los Elementos de Euclides,* atribuye al propio Pitágoras el primer reconocimiento de inconmensurables cuando escribe:

> *"Pitágoras [...] investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales"*

la tradición lo atribuye al pitagórico Hipasos de Metaponto hacia el 480 a.C. El descubrimiento pudo tener lugar al intentar reiteradamente de forma empírica encontrar una unidad que permitiera medir, de manera exacta, simultáneamente la diagonal y el lado del cuadrado, o equivalentemente la hipotenusa y un cateto de un



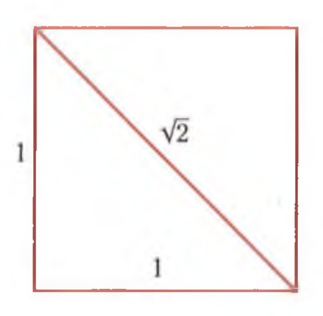
El teorema de Pitágoras (Euclides, I.47) y el pentagrama místico (Euclides, XIII.8) en los folios 26 recto y 66 recto del manuscrito ϕ-III-5 de El Escorial, uno de los más antiguos que se conservan (siglo XI).

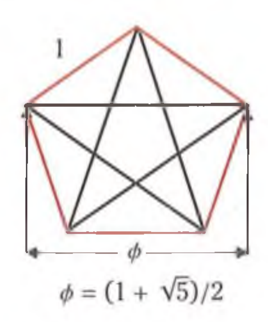
triángulo rectángulo isósceles, o bien la diagonal y el lado de un pentágono regular. Tras la publicación del artículo de Kurt von Fritz "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum" (*Annals of Mathematics* 46, 242-64, 1945), parece imponerse la hipótesis del pentágono.

La celebre frase del *Mysterium cosmographicum* (1596) de Kepler:

"La geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el teorema de Pitágoras y el otro es la sección áurea; si el primero es una joya de oro, el segundo viene a ser una piedra preciosa"

se convierte en emblemática al ser ambos tesoros los consignatarios históricos de la inconmensurabilidad. Si el descubrimiento de la inconmensurabilidad hubiera sido a través de la diagonal del cuadrado, sería $\sqrt{2}$ la primigenia magnitud inconmensurable de la historia, mientras que, si hubiera sido a través de la sección áurea entre diagonal y lado del pentágono regular habría sido $\sqrt{5}$.





En los diálogos de Platón se advierte la influencia del descubrimiento de los irracionales sobre la educación y la filosofía platónica de la ciencia. Teodoro de Cirene (discípulo de Protágoras) a quien Platón reconoce como maestro, demuestra la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos desde el 3 al 17, ambos incluidos (diálogo entre Sócrates y Teeteto, *Teeteto*, 147d). En este *diálogo* de Platón, Teeteto, además de ponderar a Teodoro como *geómetra, astrónomo, calculador, músico y maestro en todo lo relativo a la educación*, da unas orientaciones hacia la continuación de su trabajo matemático relativo a los inconmensurables. Por eso se atribuye, como veremos, a Teeteto –según Proclo y Pappus– gran parte del contenido del Libro X de los *Elementos* de Euclides que trata de la clasificación y estudio en forma geométrica de las propiedades de cierto grupo de expresiones irracionales cuadráticas. Dice Teeteto (147d) en diálogo con Sócrates:

Al hablarnos de las potencias mostraba Teodoro que las de tres y cinco pies no son, en cuanto a su longitud, simétricas a las de uno, extremo éste que comprobaba al tratarlas una a una hasta llegar a la de diecisiete pies. Pero de aquí no pasaba. Se nos ocurrió pensar entonces, puesto que el número de potencias es infinito, que convendría reunirlas en una sola, con la cual pudiese designarse a todas ellas. [...] Consideramos al número todo él de dos modos: el que cabe expresar en un producto de igual por igual y que representamos por la figura del cuadrado, dándole el nombre de cuadrado y equilátero. [...] El número que aparece intermedio entre los de ese grupo, como, por ejemplo, el tres, el cinco, y todo aquel que no puede expresarse en un producto de igual por igual, sino en un producto de mayor por menor, lo representamos por una figura de lados desiguales, el rectángulo, denominándole, por tanto, número rectangular. [...] Todas las líneas que constituyen un número cuadrado, de lados iguales y plano, son consideradas como longitudes. Todas aquellas que constituyen un cuadrado producido por dos factores desiguales, las llamamos potencias [...].

En el Libro VII de *Las leyes* Platón censura –en boca de un ateniense que dialoga con el extranjero Clinias– la ocultación a los jóvenes griegos, en su educación, de la distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables tachándola de *ignorancia vergonzosa y ridícula*. Platón opina con una retórica exageración (*Las leyes*, 819e-821a):

[...] Se me ha revelado muy tardíamente nuestra habitual deficiencia en este campo de cosas; me quedé enormemente sorprendido y, viendo en ello [en la citada ocultación] menos una debilidad humana que una necedad propia de puercos de cría, sentí vergüenza no sólo de mí mismo, sino de toda la raza helena". [...] Son temas en los que la ignorancia es una deshonra, mientras que su conocimiento, como verdades elementales que son, no es ninguna proeza. [...] son ciencias en las que deben aprender los jóvenes, porque ellas no ofrecen ni inconvenientes ni dificultades. [...] Será bueno que, por el momento, se incluyan como estudios obligatorios en nuestras leyes, a fin de que no haya en ellas lagunas.

También en el *Menón* (82b-85b), en el diálogo entre Sócrates y el esclavo de Menón, Platón hace aparecer de forma subrepticia las consecuencias de la inconmensurabilidad. Ante las preguntas de Sócrates, las primeras respuestas del esclavo son de índole aritmética, pero resultando la imaginación aritmética inexacta por la presencia del inconmensurable, Sócrates reconducirá el diálogo, induciendo un tratamiento exclusivamente geométrico (84)a:

> *Trata de decírnoslo con exactitud* [cuántos pies tiene de lado el cuadrado de superficie doble]. *Y si no quieres hacer cálculos, muéstranos la figura en el dibujo.*

Como apunta Platón, y veremos más adelante, la presencia del inconmensurable obliga a las matemáticas griegas a que la geometría deba construirse no sólo independiente sino al margen de la aritmética e incluso en detrimento de ésta, como va a tener lugar de forma palmaria en los *Elementos* de Euclides.

15 La *teoría de la proporción* de Eudoxo

"El descubrimiento de Pitágoras puso de relieve lo erróneo de esta suposición y llevó a Eudoxo a la construcción de una teoría más profunda que aparece descrita en el Libro V de los Elementos, y que es considerada por muchos matemáticos modernos como el logro más depurado de las matemáticas griegas".

G. H. Hardy. *Apología de un matemático*
(Nivola, 1999, pág. 98)

La mayor contribución de la Academia platónica sobre los inconmensurables, y una de las más relevantes de la matemática griega en general, fue la brillante solución que dio Eudoxo –el más importante de sus matemáticos– a la crisis de fundamentos con la *teoría de la proporción,* que pasó al Libro V de los *Elementos* de Euclides, uno de los más importantes de toda la obra.

Según P. Tannery (*La géométrie grecque*. Gauthier-Villars, París, 1887, pp. 97-98):

> "*En su origen* [la geometría griega] *se fundaba en la correlación entre la geometría y la aritmética sobre la proporción geométrica en la hipótesis de la conmensurabilidad de todas las magnitudes, hipótesis ciertamente tan natural como falsa* [tras el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables], *y, que, en la época en que Platón escribía Las leyes, estaba todavía muy extendida*. [...].
>
> *El descubrimiento de la inconmensurabilidad por Pitágoras debió causar, en geometría, un verdadero escándalo lógico, y, para superarlo, se tendió a restringir tanto como fuera posible el empleo del principio de semejanza, esperando que se llegara a establecer sobre una teoría de la proporcionalidad independiente de la hipótesis de la conmensurabilidad* [la teoría de la proporción de Eudoxo del Libro V de los *Elementos* de Euclides]".

El descubrimiento de magnitudes inconmensurables exigía una revisión de ciertos fundamentos de la matemática pitagórica, ya que a partir de entonces las magnitudes geométricas no podían ser medidas mediante números. El carácter continuo que tienen impide que se puedan someter a las manipulaciones algebraicas como a los números. Para conjurar la crisis de fundamentos había que soslayar el concepto infinitesimal de número irracional. Los griegos del siglo IV a.C. eran conscientes de la existencia de magnitudes geométricas que nosotros llamamos *irracionales*, pero no las concebían como números.

En la matemática actual las razones inconmensurables se expresan mediante números irracionales. Los babilonios y los egipcios habían trabajado con tales números, a base de aproximaciones, aunque sin la conciencia de la falta de exactitud, es decir, sin la constancia de la diferencia radical entre razones conmensurables e inconmensurables. En cambio para los griegos la palabra número significa *número entero positivo*; una fracción a/b indicaría no un

número racional sino una relación entre los números enteros *a* y *b*, *la razón* entre *a* y *b*. En sentido actual sería un par ordenado de números.

Como ya se ha dicho, con la aparición de las magnitudes inconmensurables quedaban afectadas, y debían ser reconstruidas, todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaran proporciones. Por ejemplo para demostrar la proposición VI.1 de los *Elementos*:

> *"Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases"*

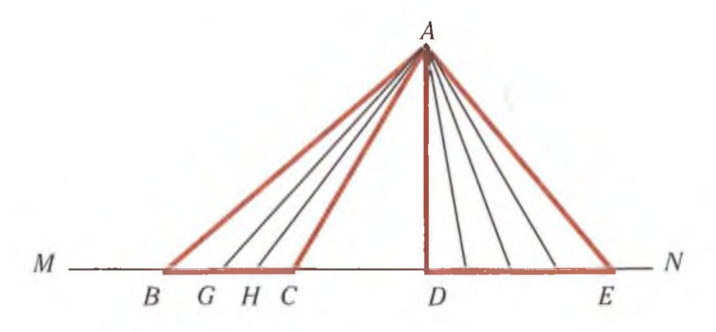
La definición pitagórica de proporción

Para los pitagóricos dos razones a/b, c/d, se dice que son proporcionales: *$a/b = c/d$, cuando existen enteros p, q, m, n tales que $a = mp$, $b = mq$, $c = np$, $d = nq$.*

Por ejemplo: 12/15 = 16/20, *ya que 12 contiene 4 de las 5 partes de 15, al igual que 16 contiene 4 de las 5 partes de 20.*

A partir de esta base se desarrolló inicialmente la teoría pitagórica de la proporcionalidad. La visión de número como tamaño se aplicó a las magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes, en la creencia de que dos segmentos de línea eran siempre conmensurables, es decir que existía una unidad común de la que ambos serían múltiplos. De esta forma la doctrina de razones enteras y proporciones se podía extender a longitudes, áreas y volúmenes de figuras simples como segmentos, rectángulos y paralelepípedos.

los primeros pitagóricos actuarían de la siguiente manera:



Sean los triángulos *ABC* y *ADE*, con bases *BC* y *DE* sobre la recta *MN*. Según la errónea hipótesis pitagórica, *BC* y *DE* tendrán alguna unidad común de medida: sea *GH* contenido p veces en *BC* y q veces en *DE*.

Marquemos los puntos de división sobre *BC* y *DE* y unámoslos con el vértice *A*.

Los triángulos *ABC* y *ADE* quedan divididos respectivamente en p y q triángulos menores, que según la proposición I.38 de los *Elementos* ("*Los triángulos que tienen igual base y altura son equivalentes*") tienen el mismo área.

Por tanto, se verifica que la razón de los triángulos

$$ABC/ADE = p/q = BC/DE$$

como se quería probar.

Es evidente que la aparición de magnitudes inconmensurables invalida la prueba geométrica exhibida en esta proposición y en todas las pruebas pitagóricas en las que haya que comparar razones de magnitudes geométricas. Se explica, pues, el consiguiente secretismo de los pitagóricos sobre la cuestión irracional y la leyenda

del castigo por su divulgación ante la amenaza apocalíptica que se cernía sobre la matemática y la filosofía pitagóricas.

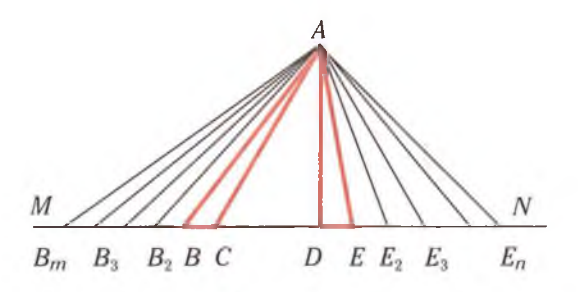
Leyendas y conjeturas aparte, se comprende que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables produjera una imponente conmoción y un escándalo lógico en todo el ámbito pitagórico, ya que exigía una revisión a fondo de los fundamentos de su matemática y su filosofía. A esta titánica empresa se enfocará la importante labor del matemático platónico Eudoxo de Cnido, que resolverá de forma brillante y rigurosa, aunque provisional, durante más de dos mil años, la antinomia radical entre finito e infinito.

Al Introducir la idea de *tan pequeño como se quiera*, antecedente de nuestro proceso de *paso al límite*, Eudoxo de Cnido encuentra una escapatoria a los problemas planteados por el infinito, el irracional y lo inconmensurable mediante un brillante recurso que desarrolla en tres estadios:

1. Una definición: igualdad de razones (*Elementos*, definición V.5).
2. Un axioma: axioma de Eudoxo–Arquímedes o axioma de continuidad (*Elementos*, definición V.4).
3. Un método: *el método de exhaución* (*Elementos*, proposición X.1).

Veamos, con la nueva definición de proporcionalidad de Eudoxo, la demostración rigurosa de la proposición VI.1 de los *Elementos*: "*Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases*", que se citó más arriba como muestra de la insuficiencia de la proporción pitagórica.

Tracemos sobre la recta CB, a partir de B, $m - 1$ segmentos iguales a CB y unamos los puntos de división B_2, B_3, ..., B_m con el vértice A.



La definición de Eudoxo de proporción

Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones, es decir, la proporción, de la siguiente forma (def. V.5 de los Elementos *de Euclides):*

"Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente".

Es decir, si a, b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c, d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b), Eudoxo define: las razones a/b y c/d son proporcionales: a/b = c/d cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene:

$$na > mb \quad y \quad nc > md$$
$$o \quad na = mb \quad y \quad nc = md$$
$$o \quad na < mb \quad y \quad nc < md$$

Tracemos a partir de E, de forma similar, $n-1$ segmentos iguales a DE y unamos los puntos de división $E_2, E_3, ..., E_n$ con el vértice A.

Se tiene:

$$B_mC = m(BC), AB_mC = m(ABC), E_nD = n(ED), AE_nD = n(AED)$$

La definición de Eudoxo de proporción generaliza la noción pitagórica de proporcionalidad de razones de enteros:

1. *Si $a/b = c/d$ en sentido pitagórico, existen enteros p, q, m, n positivos, tales que $a = mp$, $b = mq$, $c = np$, $d = nq$.*

   Sean h, k, enteros positivos cualesquiera. Se tiene:

   $$ha(>,=,<)\,kb \Rightarrow hmp(>,=,<)\,kmq \Rightarrow hp(>,=,<)\,kq \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow hnp(>,=,<)\,knq \Rightarrow hc(>,=,<)\,kd$$

   Por tanto se ha demostrado que $a/b = c/d$ en el sentido de Eudoxo.

2. *Si $a/b = c/d$ en el sentido de Eudoxo, donde a, b, c, d, son enteros positivos, existen enteros r, s tales que $ra = sb$ y por tanto $rc = sd$.*

   Sea $h = mcd\,(r, s)$, entonces: $r = qh$, $s = ph$, donde $mcd\,(q, p) = 1$.

   Ahora se verifica:

   - $$ra = sb \Rightarrow qha = phb \Rightarrow qa = pb \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{teorema de Euclides} \\ \text{Elementos, VII.30} \end{array} \right\} \Rightarrow$$
     $$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = p\alpha \\ b = q\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = m \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = pm \\ b = qm \end{array} \right\}$$
   - $$rc = sd \Rightarrow qhc = phd \Rightarrow qc = pd \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{teorema de Euclides} \\ \text{Elementos, VII.30} \end{array} \right\} \Rightarrow$$
     $$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = p\chi \\ d = q\delta \end{array} \right\} \Rightarrow \chi = \delta = n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = pn \\ d = qn \end{array} \right\}$$

   Por tanto, se ha demostrado que $a/b = c/d$ en el sentido pitagórico.

Ahora, según la proposición I.38 de los *Elementos* y su consecuencia: "*de triángulos que tienen la misma altura tiene mayor área el que tiene mayor base*", se deduce que el triángulo AB_mC es mayor, igual o menor que el triángulo AE_nD según que $m(BC)$ sea mayor, igual o menor que $n(DE)$, por tanto según la definición de Eudoxo de proporción se tiene la tesis de la proposición $ABC/ADE = BC/DE$.

Se observa que no se menciona la naturaleza conmensurable o inconmensurable de las magnitudes geométricas, la definición de Eudoxo se aplica a ambos casos.

Esta prueba de la proposición VI.1 de *Los Elementos* es una buena muestra de cómo a partir de la definición de Eudoxo las magnitudes geométricas pueden compararse a través de razones; y es sobre esta base que Eudoxo procedió a la demostración rigurosa de los resultados pitagóricos sobre proporciones y semejanza de figuras del Libro VI de los *Elementos*. En efecto, según J. Babini (*Arquímedes*: *El Método*. Eudeba, Buenos Aires, 1966, pág. 15):

> "*La definición de Eudoxo* [de igualdad de razones] *evita la dificultad que había presentado la razón entre cantidades inconmensurables, por carecer los griegos del concepto de nuestro numero irracional, definiendo, no esa razón, sino la igualdad de razones; es decir, la proporción, de una manera tal de soslayar esa carencia. Para ello, mediante desigualdades y números enteros, logra definir la proporcionalidad, sean conmensurables o no las cantidades proporcionales. Esta definición de la proporcionalidad* [Euclides V.5] *es la que luego servirá de base a la teoría de la semejanza que aparece en los Elementos de Euclides* [Libro VI]".

Sorprende la similitud de la definición de Eudoxo de igualdad de razones con *las cortaduras* que utilizó Dedekind en el siglo XIX para fundamentar el conjunto de los números reales. Dadas dos magnitudes inconmensurables a y b, la definición de Eudoxo de

proporcionalidad de razones de magnitudes separa el conjunto de todo los números racionales m/n en dos conjuntos disjuntos: un conjunto I de números para los cuales $m/n < a/b$, y otro conjunto D para los cuales $m/n > a/b$. El par de conjuntos (I,D) en el que todo número de I es menor que todo número de D se denomina *cortadura* de Dedekind, que define precisamente un número real.

Eudoxo prescinde del número irracional y opera con magnitudes que se pueden hacer menores que otras arbitrariamente prefijadas para lo que introduce lo que hoy llamamos el *axioma de Eudoxo-Arquímedes* o *axioma de continuidad*, que aparece como una definición en los *Elementos* (definición V.4):

> "*Existe razón entre dos cantidades cuando un múltiplo de la menor supera a la mayor*".

La asunción de Euclides fue considerada por Arquímedes como un principio o postulado, de ahí el nombre con el que ha pasado a la literatura matemática. La existencia de *geometrías no arquimedianas*, introducidas en el siglo XX, que no cumplen con ese postulado, muestra claramente cuán perspicaz fue la ubicación que Arquímedes asignó a este *principio* en la construcción geométrica. La importancia del axioma la han remarcado Klein, en la citada obra *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. (Geometría, pág. 273) y Hilbert, en su obra *Fundamentos de la geometría*, donde le asigna un papel fundamental en la estructura de la geometría. En la época de Klein y Hilbert ya se había observado que Euclides había utilizado de forma implícita el *axioma de continuidad*, por eso cuando estudia los diversos grupos de axiomas, Hilbert escribe en la obra citada (C.S.I.C. Madrid, 1996, pág. 55):

> "*Cuando se agrega el axioma de Arquímedes, el de las paralelas puede ser reemplazado por la condición de que la suma de los ángulos de un triángulo sea igual a dos rectos*".

Arquímedes enuncia el *axioma de continuidad* en el postulado V del Libro I de su obra *Sobre la esfera y el cilindro* y lo repite en la carta a Dositeo de *Sobre la cuadratura de la parábola*, y asegura que fue utilizado por los geómetras anteriores –Hipócrates y Eudoxo– para demostrar los teoremas del Libro XII de los *Elementos* sobre círculos, esferas, cilindros, pirámides y conos.

El *axioma de Eudoxo-Arquímedes* juega un papel crucial en la *teoría de la proporción* de Eudoxo, en el estudio del cálculo con igualdades entre razones, es decir, en la teoría geométrica de todas las posibles transformaciones algebraicas de la ecuación $a/b = c/d$, lo que se ilustra fehacientemente en la demostración de la proposición V.9 de los *Elementos*: "*Si $a/c = b/c$ se verifica $a = b$*".

Supongamos que $a > b$. Entonces existe un entero n tal que $n(a - b) > c$. Sea mc el múltiplo más pequeño de c que supera a nb. Entonces, se tiene: $mc > nb \geq (m - 1)c$. De donde resulta que $na > mc$, mientras que $nb < mc$, lo que contradice la definición de la proporcionalidad $a/c = b/c$.

Así pues, se sigue por necesidad que $a = b$.

Veamos otra aplicación a la importante proposición 16 del Libro VI:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc$$

["*El producto de los medios es igual al producto de los extremos*"].

En primer lugar, se tiene: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ [proposición V.15] ya que, según la definición V.5:

$$\begin{aligned} na > mb &\Rightarrow nad > mbd \\ na = mb &\Rightarrow nad = mbd \\ na < mb &\Rightarrow nad < mbd \end{aligned}$$



Eudoxo de Cnido.
Imagen atribuida a la efigie de Eudoxo aunque no es seguro que sea tal porque también se atribuye a Ptolomeo. La confusión puede provenir de la dedicación de ambos matemáticos a la astronomía.

Análogamente, se tiene

$$\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

que junto con $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ y la hipótesis

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

dan

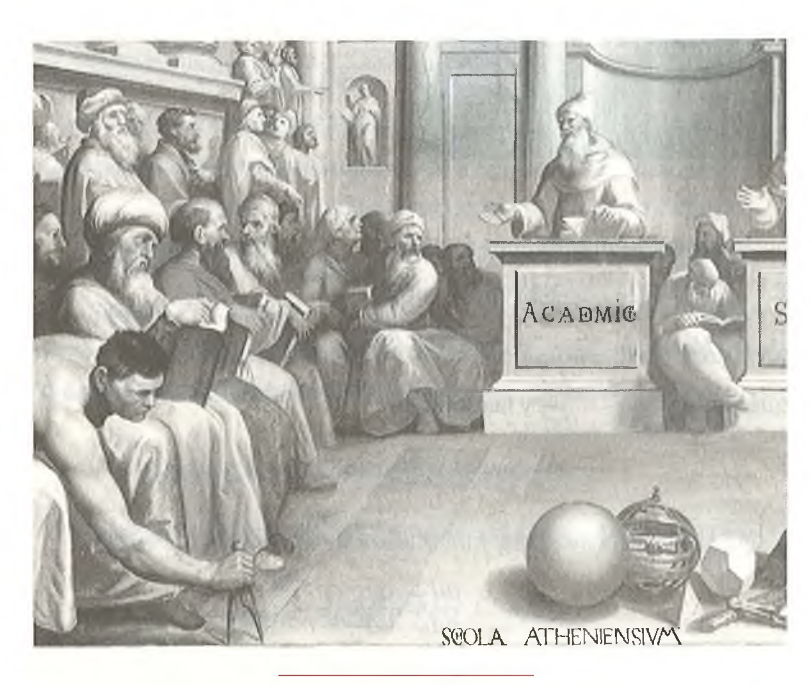
$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

de donde, según la proposición V.9, demostrada anteriormente, resulta que $ad = bc$.

Estas demostraciones son un buen ejemplo de cómo se demuestran las habituales propiedades de las proporciones en el Libro V de los *Elementos*.

La *teoría de la proporción* desarrollada por Eudoxo permitió a las matemáticas griegas manejar razones de magnitudes geométri-

cas de la misma forma y con la misma finalidad con que las matemáticas de hoy operan con números reales. Sobre la base establecida, Eudoxo procedió a establecer pruebas geométricas rigurosas de los resultados pitagóricos sobre figuras semejantes del Libro VI de los *Elementos*, así como sobre áreas de círculos y volúmenes de pirámides y conos del Libro XII que Hipócrates y Demócrito habían vislumbrado unos 50 años antes, más o menos.



La Academia de Atenas.
Biblioteca de El Escorial. P. Tibaldi. 1586.

16 Los problemas infinitesimales. El *método de exhaución*

"En su método de exhaución, aplicado al cálculo de áreas y volúmenes, Eudoxo ha mostrado que no tenemos necesidad de suponer la existencia de cantidades infinitamente pequeñas. Basta poder alcanzar una magnitud tan pequeña como queramos gracias a la división continua de una magnitud dada".

E. T. Bell, *Les grands mathématiciens*
(Payot, 1950, pág. 37)

En la geometría griega, para determinar el área $a(A)$ de una figura curvilínea A, se busca una sucesión de polígonos $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ que aproximen progresivamente el área de A. El método de exhaución se ideará para sustituir con absoluto rigor en la demostración de la magnitud de un área o volumen a la idea intuitiva de que el área de A es *el límite* de las áreas de los polígonos $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$. Se intenta demostrar que se puede encontrar un polígono en la sucesión $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ cuyo área difiera del área de la figura A en una cantidad menor que otra prefijada. Simbólicamente:

"Dado $\varepsilon > 0$ se debe encontrar un polígono P_n tal que la diferencia $a(A) - a(P_n)$ sea menor que ε para n suficientemente grande".

A este respecto cumple un papel fundamental la Proposición X.1 de los *Elementos*, que Euclides demuestra aplicando el axioma V.4 de Eudoxo-Arquímedes:

"Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas".

Liber X. 193

PROP. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus AB, C *propositis, si à majore* AB *auferatur majus quàm dimidium,* (AH) *& ab eo* (HB)*, quod reliquum est, rursus detrahatur majus quam dimidium* (HI)*, & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo* IB*, quæ minor erit propositâ minore magnitudine* C.

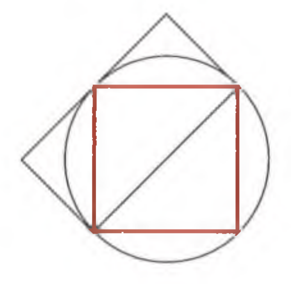
Accipe C toties, donec ejus multiplex DE proximè excedat AB; sintque DF = FG = GE = C. Deme ex AB plusquam dimidium AH, & à reliquo HB plusquam dimidium HI, & sic deinceps, donec partes AH, HI, IB æquè multæ sint partibus DF, FG, GE. Jam liquet FE, quæ non minor est quàm ½ DE, majorem esse, quàm HB, quæ minor est, quàm ½ AB ⊐ DE. Pariterque GE quæ non minor est quàm ½ FE, major est quàm IB ⊐ ½ HB. ergò C, vel GE ⊏ IB. Q. E. D.

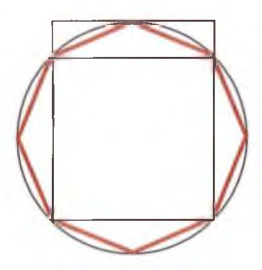
Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB rursus dimidium HI, & ità deinceps.

La proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides en la edición de I. Barrow (Londres, 1678). Esta cuidada edición en latín fue publicada por vez primera en 1655 y reeditada en numerosas ocasiones.

Este resultado, que es conocido como *principio de Eudoxo*, abre las puertas al *método de exhaución*, con el que Eudoxo demuestra rigurosamente los teoremas sobre el área del círculo así como sobre los volúmenes de la pirámide y el cono, que habían sido enunciados por Hipócrates de Quíos y Demócrito, respectivamente, y que aparecen en los *Elementos* (proposiciones XII.2, XII.5 y XII.10).

Inscribiendo un cuadrado en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo. Si ahora se considera el octógono inscrito, se puede ver que la diferencia entre cada segmento circular (determinado por el cuadrado y el círculo) y el triángulo isósceles que determinan dos lados del octógono, es menor que la mitad del segmento circular. Partiendo de un círculo y un cuadrado (por pequeño que sea), continuando el proceso anterior, se resta reiteradamente a una cantidad otra cantidad superior a su mitad (en primer lugar, al círculo se le resta el cuadrado, en segundo lugar, a los segmentos circulares resultantes los triángulos isósceles que determinan el octógono, y así sucesivamente), aplicando el *principio de Eudoxo* suficientemente, alcanzaremos un polígono inscrito cuya diferencia con el círculo es menor que el cuadrado pequeño prefijado.





Simbólicamente (*lema de exhaución del círculo*):

"Dado un círculo C y un número $\varepsilon > 0$ *se puede encontrar un polígono regular P inscrito en C tal que* $a(C) - a(P) < \varepsilon$*"*

Mediante este resultado Eudoxo demostró rigurosamente, con el típico argumento de la doble reducción al absurdo, el llamado *teorema de Hipócrates* (*Elementos* de Euclides, XII.2):
"*Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*".

En efecto, sean C y D círculos de diámetros c y d; el teorema enuncia que $a(C)/a(D) = c^2/d^2$. La demostración consiste en probar que cualquiera de las desigualdades:

$$a(C)/a(D) < c^2/d^2$$
$$a(C)/a(D) > c^2/d^2$$

lleva a contradicción.

Supongamos que en vez de la igualdad se verifica

$$a(C)/a(D) < c^2/d^2$$

Entonces: $a(D) > [a(C) \cdot d^2]/c^2 = h$. Sea $\varepsilon = a(D) - h$.

Según el resultado anterior se puede encontrar un polígono Q inscrito en el círculo D tal que:

$$a(D) - a(Q) < \varepsilon = a(D) - h$$
$$\text{Por tanto:} \quad a(Q) > h$$

Sea P el polígono regular semejante a Q inscrito en el círculo C. Ahora bien, según la proposición XII.1 de los *Elementos*:

> "*los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros*":

$$a(P)/a(Q) = c^2/d^2 = a(C)/h$$

Se tiene: $h/a(Q) = a(C)/a(P) > 1$.

Por tanto $h > a(Q)$, lo cual es una contradicción.

Luego no es cierto que $a(C)/a(D) < c^2/d^2$.

Intercambiando los papeles entre los círculos se demuestra análogamente que no es cierto que $a(C)/a(D) > c^2/d^2$. De donde concluimos que la igualdad es cierta.

La proposición XII.2 de los *Elementos* establece que la razón del área de un círculo al cuadrado del diámetro es siempre la misma, un hecho de gran importancia que introducía una constante vinculada a todos los círculos y que, sin embargo, Eudoxo y Euclides, de acuerdo con su proceder estrictamente geométrico, no repararon en su cuantificación. A este asunto dedicará Arquímedes todo un libro: *Sobre la medida del círculo*, donde obtiene una magnífica acotación del número π que amplía los resultados de Euclides.

Al aplicar también el lema de exhaución del círculo mediante polígonos inscritos, se conjetura que Eudoxo pudo demostrar, asimismo, mediante una doble reducción al absurdo, que, al igual que para el prisma, el volumen del cilindro es el producto del área de su base por su altura.

Sobre el *método de exhaución* de Eudoxo escribe J. Babini (*Arquímedes*: *El Método*. Eudeba, Buenos Aires, 1966, pág. 16):

> *"El método de exhaución ideado por Eudoxo y aplicado por éste por primera vez, es el que en la geometría griega suple los actuales métodos infinitesimales. La primera observación importante que se formula es que no se trata de un método de descubrimiento sino de demostración, es decir, que supone conocido de alguna manera el resultado y ofrece un procedimiento riguroso para demostrarlo. De paso observemos como, ya en la época de Eudoxo, la matemática reflejaba su característica fundamental de poner el acento en el proceso deductivo, en la demostración, y no en el resultado".*

Acerca del nombre de *método de exhaución* conviene observar que es bastante inapropiado porque nunca se llega a agotar, con los

polígonos que van aproximando, la figura cuya magnitud se quiere estudiar. Es más, la exhaución paradójicamente pretende resolver rigurosamente el problema de la no exhaustividad del infinito. De hecho el nombre del método no lo utilizaron los griegos sino que es una desafortunada acuñación introducida en el siglo XVII por Grégoire de Saint-Vincent, pero su uso se ha hecho habitual en la literatura matemática, aunque alguno de los más importantes estudiosos de Arquímedes, como E. J. Dijksterhuis se resisten a

El método de exhaución y el Libro XII de los Elementos

El Libro XII de los Elementos podría ser la respuesta de la Academia, y en particular de Eudoxo, a las quejas que había vertido Platón acerca de la exigua dedicación a la geometría del espacio o estereometría (La República, 528b).

En el Libro XII, Euclides aplica, de forma impecable, el método de exhaución de Eudoxo para obtener teoremas sobre el área del círculo y la cubatura –en nuestro lenguaje, el volumen– de pirámides, conos, cilindros y esferas. Estos resultados cubren, en los manuales escolares elementales, los capítulos sobre geometría del espacio

Las dos primeras proposiciones –donde Euclides aplica por primera vez el método de exhaución–, demuestran que los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros.

En las proposiciones 5 y 6 se demuestra que las pirámides que tienen la misma altura son entre sí como sus bases, y en la proposición 7, que todo prisma triangular se descompone en tres pirámides

llamarlo así y prefieren denominarlo como *método indirecto del proceso infinito*.

Una de las principales aportaciones de la Academia platónica a las matemáticas es la trascendente acogida del problema de los inconmensurables y la resolución de la consiguiente crisis de fundamentos a base de sustituir los principios aritméticos de la matemática pitagórica por presupuestos geométricos. Realmente el trabajo

triangulares equivalentes, y como corolario, que toda pirámide es la tercera parte del prisma de la misma base y altura. La proposición 8 demuestra que la razón entre las pirámides semejantes es el cubo de la razón de semejanza.

La proposición 10 muestra que todo cono es la tercera parte de un cilindro con la misma base y altura. Entre las proposiciones 11 y 16 Euclides estudia, para los conos y cilindros, su relación con las bases o las alturas. En particular, en la proposición 12 se demuestra que conos y cilindros son entre sí como los cubos de los diámetros de sus bases.

La proposición 17 demuestra que poliedros semejantes inscritos en esferas son proporcionales a los cubos de sus diámetros, resultado que se aplica para demostrar la proposición 18, última del Libro XII, según la cual las esferas son proporcionales a los cubos de los diámetros.

Las proposiciones de Euclides no proporcionan exactamente el resultado de la cuadratura de las áreas o la cubatura de los sólidos sino que suministran un medio de comparación entre dos áreas o volúmenes, es decir, se limitan a dar las razones entre las figuras y ciertos elementos geométricos que intervienen en ellas.

de Eudoxo ha sido uno de los más influyentes en la historia de las matemáticas. Por una parte, su definición de igualdad de razones, permitió salvaguardar el legado pitagórico mediante la reconstrucción de las pruebas de los teorema pitagóricos que involucraban proporciones, y por otra, *su método de exhaución* se convirtió en una herramienta fundamental en las matemáticas griegas para resolver los problemas de áreas y volúmenes. En realidad, el *método de exhaución* es la traducción geométrica de la operación aritmética del paso al límite del análisis infinitesimal. Con el *método de exhaución*, tanto Euclides –en el Libro XII de los *Elementos*– como Arquímedes –en las obras *Sobre la cuadratura de la parábola*, *Sobre la esfera y el cilindro*, y otras– pudieron alcanzar, con todo rigor, los mismos resultados sobre cuadraturas y cubaturas que cuando se efectúan investigaciones propiamente infinitesimales mediante la potencialidad aritmética del uso de los límites.

Uno de los aciertos más brillantes de Eudoxo es el de razón (*logos*) de dos magnitudes geométricas homogéneas (definición V.4 de los *Elementos* de Euclides), equivalente a la noción general de número (*axioma de Eudoxo-Arquímedes: "Dos magnitudes tiene razón cuando un múltiplo de cada una puede ser mayor que la otra"*), que es uno de los más importantes postulados de continuidad en las modernas investigaciones sobre fundamentos de la geometría. Veamos lo que escribe F. Klein sobre esta definición (*Matemática elemental desde un punto de vista superior* (Biblioteca matemática. 1931. pp. 273-274):

> "[...] *Coincide con este axioma el postulado que se da en la fundamentación de la geometría, que dice que por repetición de un segmento de una semirrecta se puede alcanzar o pasar cualquier punto de ella. También se habla de este postulado cuando se dice que: una magnitud r recibe el nombre de infinitamente pequeño actual respecto de otra b, o, recíprocamente, b, infinitamente grande actual respecto a la a, cuando multiplicándola por cualquier número finito el pro-*

ducto se conserva siempre inferior a b. Euclides al adoptar tal sistema de magnitudes geométricas, excluye completamente la consideración de infinitamente pequeños o infinitamente grandes actuales, exclusión imprescindible para su teoría de las proporciones, ya que ésta no es otra cosa que una forma de la moderna teoría de números irracionales. Euclides (o bien Eudoxo), procede –y esto es lo más admirable– del mismo modo que se ha procedido en las investigaciones modernas sobre la noción de número y utiliza exactamente los mismos medios auxiliares".

Los inconmensurables inauguran en el mundo griego los problemas infinitesimales asociados a la continuidad de los entes geométricos, que enfrentan la infinita divisibilidad de los segmentos con la existencia de indivisibles. Estos asuntos fueron objeto de polémica, sobre la constitución de la materia y la estructura del continuo, entre los filósofos de la Academia posteriores a Platón y los pensadores del Liceo de Aristóteles. Mientras la Academia, dirigida por Xenócrates, defendía los indivisibles fijos, el Liceo, en sus especulaciones sobre la naturaleza del infinito y la existencia de indivisibles o infinitesimales, mantenía la continua divisibilidad de los entes geométricos. Para Aristóteles *"el continuo es infinitamente divisible"* (*Física*, Libro III, cap. 7, 207b).

Estas concepciones de Aristóteles arrancan de la crítica a las concepciones pitagóricas que expone en el Libro I de la *Metafísica* (985b, 986a). El misticismo numérico de los pitagóricos describía las formas geométricas mediante números como parte de su doctrina de que "*todas las cosas son números*" y, por tanto, la base de la naturaleza es numérica porque los cuerpos sólidos se componen de superficies, las superficies de planos, los planos de líneas y las líneas de puntos, y, en su concepción geométrica del número, los pitagóricos identificaban puntos y unidades. La concepción pitagórica sobre la generación de figuras geométricas es criticada por Aristóteles en el Libro VII de la *Metafísica* (1036b): *"La continuidad*

es la materia de las figuras geométricas y el número el elemento formal", de modo que para él "*una línea es lo que se extiende entre dos puntos*" más bien que "*dos puntos colocados uno al lado del otro constituyen en sí una línea*". Esto es la teoría del flujo que rechaza la existencia atomística de partes intrínsecamente indivisibles al defender la divisibilidad de los segmentos *ad infinitum*.

Aristóteles considera toda magnitud finita pero, como admite la infinita divisibilidad, rechaza el atomismo geométrico. La antinomia entre rechazo o admisión del infinito es resuelta acuñando los términos "*actual*" y "*potencial*". Un infinito "*en acto*", es decir, un todo constituido de una infinidad actual de cosas dadas, no puede ser pensado como inteligible; sin embargo sí se puede pensar en una magnitud creciente por encima "*en potencia*" de todo límite, o en una serie de magnitudes cada vez más pequeñas que "*en potencia*" pueden hacerse más pequeñas que cualquier magnitud. Pero estas magnitudes, que no están dadas como una infinidad acabada, siendo susceptibles de prolongación "*tanto como se quiera*", puede decirse que son infinitas "*en potencia*".

Para Aristóteles el infinito es como una ilusión del pensamiento que siempre puede traspasar en potencia un límite prefijado, pero distingue la cuestión del infinitamente grande y el infinitamente pequeño en las magnitudes y en los números. Así, la doctrina aristotélica se hace confusa, por razones metafísicas, cuando se aplica al número, porque afirma el infinito extensivo del número pero niega su divisibilidad indefinida. En efecto, hay un pasaje de la *Física* donde aplica sintéticamente la "*teoría de la potencia y el acto*", pero donde manifiesta el confusionismo aludido (*Física*, Libro III, Cap. 7, 207a):

> "*El número, en un proceso de disminución hacia el mínimo, tiene un término; mientras, en un proceso de aumento, siempre se ve excedida cualquier cantidad que se tome. En las magnitudes, en cambio, ocurre todo lo contrario; pues en un*

proceso que tienda al mínimo, queda excedida negativamente toda magnitud; mientras que en un proceso de aumento no existe una magnitud infinita. [...]. *En un proceso hacia el más, el número es siempre inteligible, ya que la magnitud se puede dividir indefinidamente por la mitad. Por esta razón existe el infinito en potencia, pero de ninguna manera en acto".*

En su exploración del infinito parece que para Aristóteles lo discreto y lo finito son objeto de la ciencia, reservando para la metafísica la virtualidad del continuo y del infinito.



Aristóteles.
Fragmento de *La Escuela de Atenas* de Rafael. Estancia de la Signatura. Vaticano.

La aplicación del *infinito potencial* a la división de un segmento de recta conducirá históricamente a los infinitesimales, mientras que la aplicación de un *infinito actual* a la división de un segmento de recta en un número infinito de puntos introduce los indivisibles, que sobre todo con Cavalieri y Pascal se convertirán en el siglo XVII en un poderoso soporte heurístico del cálculo infinitesimal.

La concepción aristotélica del infinito

La teoría de magnitudes de Eudoxo tiene una gran influencia en la concepción de Aristóteles sobre el infinito. De hecho en la Física, *donde expone su concepción sobre el infinito, la continuidad, la divisibilidad de magnitudes y el movimiento, Aristóteles conjuga el* axioma de continuidad *(V.4) con el* principio de Eudoxo *(X.1) cuando indica que al adicionar continuamente a una cantidad finita se sobrepasará toda otra cantidad finita y al sustraer continuamente de una cantidad se llegará a una cantidad menor que cualquier otra* (Física, *Libro VIII, Cap. 10, 266b):*

"Sumando siempre algo al finito, sobrepasaremos todo finito; igualmente restándole algo, vendremos a caer por debajo de todo finito".

He aquí una descripción del infinito potencial en las matemáticas, basado en la idea de "tan grande o tan pequeño como se quiera" *del* método de exhaución *de Eudoxo, que destierra al infinito actual de las matemáticas y que servirá ulteriormente de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. En palabras de Aristóteles* (Física, *Libro III, Cap. 7, 208a):*

La polémica entre la Academia y el Liceo tuvo una gran repercusión ulterior en el desarrollo conceptual de la matemática, inaugurando la dualidad infinitesimales–indivisibles, que establece la tradición cinemática que representan Arquímedes, Oresme, Galileo, Torricelli, Roberval, Barrow y Newton frente a la tradición atomística representada por Demócrito, Kepler, Cavalieri, Fermat, Pascal, Huygens y Leibniz.

"Los matemáticos actualmente no precisan del infinito en sus estudios, ni lo emplean en ellos, sino que conciben la existencia de una magnitud finita tan grande como se quiera".



234 ARIST. PHYSICORVM.

remissionem est alteratum, & in tempore dato in duplo duplum, & duplum in duplo: dimidium autem in dimidio [illegible] dimidio dimidium, aut in [illegible] vero id, quod alterat, aut auget, tantum in tanto auget, aut alterat: non necesse est & dimidium in dimidio, et in dimidio dimidium alterare, vel augere. sed nihil, si forte fuerit, alterabit, vel augebit, quemadmodum & in pondere.

PHYSICORVM ARISTOTELIS LIBER VIII.

Declaravit supra [illegible] ... libro quia [illegible]

Quod motus utrinque sit aeternus. CAP. 1.

An vero ortus ne aliquando est motus, antequam non erat, rursusque adeo corrumpitur, ut nihil penitus moveatur, an neque factus est, neque corrumpitur, sed semper erat, & semper erit, [illegible] hisce quae sunt immortale, [illegible] quaedam in [illegible] ... quia mundum faciunt, tum quia contemplatio [illegible] de generatione, corruptioneque, quod impossibile

LIBER VIII. 235

impossibile est esse si non sit motus. Verum qui mundos infinitos esse, & alios ipsorum fieri, alios corrumpi dicunt, hi motum inquiunt semper esse: sunt enim generationes, & corruptiones ipsorum cum motu necesse est: qui vero mundum aut unum, & semper eundem esse dicunt, aut unum quidem sed non semper, hi de motu quoque similiter opinantur. Si igitur contingit aliquando nihil moveri, dupliciter id accidere necesse est. Aut enim ut Anaxagoras censet: Dicit enim cum omnia simul essent, atque quiescerent tempore infinito, mentem [illegible] segregasse. Aut ut Empedocles dicit, interdum res moveri, interdum quiescere: moveri quidem cum aut unum ex multis concordia, aut ex uno multa discordia facit: quiescere vero in hisce temporibus, quae inter haec media cadunt. Dicit enim hoc modo. Nam quod de multis nasci consueverit unum. Atque iterum ex uno generata plura renasci. Hoc fiunt, fixumque sibi non permanet aevum. At quae mutantur nunquam cessante recursu. Hoc si perpetuo stabilem versantur in orbem. Cum enim dicit, at quae mutantur nunquam cessante recursu, id Empedoclem arbitrandum est intelligere: hinc inquam illuc, & illinc huc fieri motum. Considerandum est igitur de hoc, quonam modo se habet: est enim operaepretium hanc perspicere veritatem, & non solum ad naturalem

tores, primos mo- tus, & pri- [illegible] declara- tur.

Página del Libro VIII de la *Física* de Aristóteles. Edición salmantina de 1555. Biblioteca Central de Barcelona.

17 La estructura de la geometría griega

"En las más fáciles ciencias, la Aritmética y la Geometría, vemos con toda claridad que los antiguos geómetras griegos se han servido de cierto Análisis, que extendían a la resolución de todos los problemas, si bien privaron de él a la posteridad".

Descartes. *Reglas para la dirección del espíritu* (AT.X.373).

Una de las consecuencias más importantes de la crisis de fundamentos que provoca en las matemáticas griegas la aparición de los inconmensurables es de índole metodológica. La crisis trajo consigo un refinamiento geométrico. Como reacción al lenguaje ingenuo de los pitagóricos, mezcla de brillantes ideas matemáticas, actitudes místicas y aforismos religiosos, los matemáticos platónicos imponen el supremo rigor lógico por encima de cualquier otro valor, y esto se plasma en un estilo sintético de exposición y demostración, cristalizado en la sistematización axiomático-deductiva de la geometría griega elemental, compilada en el enciclopédico tratado de los *Elementos* de Euclides.



Euclides enseñando geometría a sus discípulos. Fragmento de *La Escuela de Atenas* de Rafael. Estancia de la Signatura, Vaticano. Rafael pintó a Euclides con el rostro de Bramante.

El severo, impecable y riguroso estilo de la obra euclidiana, que oculta la vía heurística del descubrimiento alcanzado por vía analítica o mecánica, se impondrá como paradigma normativo en la redacción de los más importantes tratados de las matemáticas griegas, en particular las *Cónicas* de Apolonio y las obras de Arquímedes. Pero el respeto absoluto al paradigma estilístico euclídeo cercena considerablemente las posibilidades de expresión y ante

el camuflaje del camino que sigue la investigación, se pone sólo de manifiesto la vía apodíctica. Así sucede, por ejemplo, con el *método de exhaución,* que es sólo un método de demostración de lo que se ha descubierto *a priori* mediante los diversos procedimientos inventivos. Como consecuencia de ello es posible conjeturar que la rigidez de los cánones impuestos por esta forma de expresión puede haber provocado que una amplia y valiosa tradición matemática griega –no susceptible de ser escrita de forma euclídea– haya quedado fuera de las grandes obras clásicas y tal vez por ello haya desaparecido para la posteridad.

Cuando a partir del Renacimiento tiene lugar la recuperación, reconstrucción y divulgación del legado clásico griego, los matemáticos lo acogen con entusiasmo, pero preocupados porque el estilo sintético y demostrativo de exposición de la geometría griega, y en particular de las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados. Por ello manifiestan, junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza. Incluso algunos (Torricelli, Barrow, Wallis,...) sospechaban sin fundamento que los griegos disponían de algún instrumento (¿el álgebra?), un determinado tipo de análisis geométrico, pero que lo habían ocultado de forma tan perfecta que a los modernos matemáticos –Viète, Fermat, Descartes– les había resultado más fácil inventar un nuevo análisis –la geometría analítica– que recuperar el antiguo. Quizá es Descartes quien con mayor claridad muestra –en la regla IV de las *Reglas para la dirección del espíritu* (AT.X.373-377)– la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la geometría griega.

Precisamente, la geometría analítica de Fermat y Descartes, y con base en ella el cálculo Infinitesimal, son instrumentos que van emergiendo a lo largo de la historia de las matemáticas persiguiendo alumbrar métodos que permitan fundir en un sólo acto intelectual el descubrimiento y la demostración.

Otra consecuencia de los inconmensurables es el desarrollo de la geometría al margen de la aritmética, la ausencia de un álgebra en sentido algorítmico y simbólico, y es más, la conversión de toda la matemática en geometría, porque, tras el descubrimiento pitagórico, donde fracasa la aritmética triunfa la geometría. En efecto, como escribe V. Gómez Pin en su obra *La tentación pitagórica* (Síntesis, 1999, pág. 56):

> *"La crisis abierta por el descubrimiento de la irracionalidad de raíz cuadrada de dos tuvo como consecuencia que la geometría fuera en parte privilegiada en detrimento de la aritmética. Pues irreductible a la aritmética racional,* $\sqrt{2}$ *es, sin embargo, perfectamente designable o representable en el orden geométrico* [aplicando el *Teorema de Pitágoras*] *sustentado en esa misma aritmética racional.* [...]. *Cabría, pues, decir que donde el contar fracasa sí triunfa la medida".*

La solución de la crisis de los irracionales con la *teoría de la proporción* de Eudoxo, que quedó plasmada en el Libro V de los *Elementos* de Euclides y constituyó a partir de entonces la médula de la geometría griega, fue un magnífico éxito científico, pero tomó una forma geométrico-deductiva de acuerdo con la filosofía platónica. Cierto que en ese momento la crisis no podía solventarse con la definición de número irracional, ya que ello hubiera precisado un desarrollo considerable de las técnicas de la aritmética de la computación, lo que no podía darse en un ambiente científico dominado por el idealismo platónico que, despreciando el estudio de la dimensión sensible de la realidad, rechazaba de forma elitista los usos prácticos de las matemáticas –considerados como indignos y degradantes–, y en particular las cuestiones de cálculo objeto de la *logística*.

Como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que impedía el tratamiento numérico de

longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, lo que determinó la transformación del álgebra oriental que los pitagóricos habían heredado de los babilonios en el *álgebra geométrica* del Libro II de los *Elementos*.

El *álgebra geométrica,* que aparece con los pitagóricos y se consolida en la Academia platónica, es una especie de algoritmo geométrico que permitía resolver los problemas sin recurrir al cálculo literal. Los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas. Por ejemplo, la suma de dos números se realiza yuxtaponiendo segmentos, el producto se convierte en el área del rectángulo de lados las longitudes de esos números y la extracción de una raíz cuadrada es equivalente a la construcción de un cuadrado cuyo área es igual a la de un rectángulo dado.

Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su *álgebra geométrica* un poderoso instrumento para la resolución geométrica de ecuaciones mediante el método de la *aplicación de las áreas*, pero la limitación operacional que ello supone, junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente rémora para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y, por tanto, los griegos tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes.

Como se ha visto en la descripción del Libro XII de los *Elementos*, para llevar a cabo la cuadratura o cubatura de una figura los griegos debían encontrar la razón de la figura y otra figura previamente conocida, por ejemplo la razón entre un segmento de parábola y un triángulo inscrito, como hace Arquímedes en *Sobre la cuadratura de la parábola*. Es por ello por lo que desarrollaron

una muy perfeccionada teoría de magnitudes y proporciones, sobre todo por parte de Eudoxo.

En la obra *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Geometría* (Biblioteca matemática. 1931. pág. 255), F. Klein describe estas características de la geometría griega en relación con la matemática moderna:

> "*Una de las diferencias más importantes entre la matemática moderna y la matemática griega estriba en que los griegos no poseían ni Aritmética independiente, ni fracciones decimales que tanto facilitan el cálculo numérico, ni el cálculo literal general, que son invenciones del Renacimiento; solamente tenían un cálculo en forma geométrica, en el cual en vez de operar con números se operaba por medio de construcciones con segmentos y otras magnitudes geométricas, lo que naturalmente, era extraordinariamente más complicado que nuestra Aritmética. También carecían de los números negativos, que tanta flexibilidad dan a la Aritmética y al Álgebra, y como consecuencia de ello les faltaba la generalidad del método que permite reunir en una sola fórmula todos los casos posibles, de modo que se encontraban continuamente embarazados por la consideración de numerosos casos particulares*".

Otro rasgo característico de la limitación algebraica de la geometría griega es la imposibilidad de introducción de nuevas curvas por medio de ecuaciones, de modo que las curvas se obtenían constructivamente mediante lugares geométricos o intersección de superficies y también a través de relaciones de áreas o longitudes, que daban la propiedad de definición de la curva. De esta forma, el elenco de curvas que manejaron los griegos hubo de ser necesariamente muy limitado: *las cónicas* de Menecmo y Apolonio, *la espiral* de Arquímedes, *la cuadratriz* de Hipias o Dinóstrato, *la cisoide* de Diocles, *la hipopede* de Eudoxo, *la concoide* de Nicome-

LIBER

eritq; p.2.huius quod fit ex tota.a.b. in se: equũ ei qd fit ex ipsa in.a.c.z.c.b. sed ex ipsa in.a.c.tm fit quãtũ ex.a.c.in se.z ex.a.c.in.b.c.p.3.hui9. Itẽq; ex ipsa a.b.tota in.b.c.tm fit quãtum ex.c.b.in se.z ex.c.b.in.a.c. per eandem. ergo qd fit ex tota.a.b.in se equũ e ei qd fit ex.a.c.in se z in.c.b.z ex.c.b.in se.z in.a.c.qd est propositum. Sed hac via non patet corelariũ. sicut via precedenti patet. vn/ de prima est auctori magis consona.

Propositio .5.



Si linea recta per duo equalia duoq; iequalia secetur. qd sub inequalibus totius sectionis rectangulũ continetur cũ eo quadrato qd ab ea que inter vtrasq; e sectiones descri bitur equum est ei quadrato qd a dimidio totius linee i se ducto describitur.

Sit linea.a.b.diuisa p equalia in pũcto.c.z p inequalia in puncto.d. dico qua/ dratũ.c.b.esse equale ei qd fit ex.a.d.in.d.b.z qdrato.c.d. Describã quadra/ tum.c.b.qd sit.c.b.f.e.in quo ptrahã diametrũ.e.b. z ducã.d.g. equidistante b.f.q secet diametrũ.e.b.i pũcto.h.z a pũcto.h.educã eqdistãte linee.a.b.q sit.h. k.secãs linea.b.f.in puncto.m. z lineã.c.e.in puncto.l.z ptrahã a.k.equidistan tẽ.c.e.eritq; p corelariũ pmisse vtraq; duaz supficieru.l.g.z.d.m.quadrata.z per 43.primi duo supplemẽta.c.h.z.h.f.equalia.ergo addito quadrato.d.m. vtriq; erit palellogramũ.c.m.equale palellogramo.d.f.z q2.a.l.est equale.c.m.p.36.pri mi: erit.a.h.equale gnomoni qui circũstat quadrato.l.g. ergo addito vtriq; qua/ drato.l.g.erit.a.h.cũ quadrato.l.g.equale quadrato.c.f.qd est propositum.

Propositio .6.



Si recta linea in duo equalia diuidat.alia vero ei linea in longũ addat.qd ex ductu toti9 iã cõposite i eã q iã adiecta e cũ eo qd ex ductu dimidie in seipsã: equũ e ei qdrato qd ab ea q cõstat ex adiecta z dimidia i seipsã ducta describit.

Sit linea.a.b.diuisa p equalia in puncto.c.cui; addat linea.b.d. dico q quadratũ.c.d.qd sit.c.d.e.f.equale e ei qd fit ex tota.a.d.i.b.d.z quadra to.c.b. Producã i quadrato predicto diametrũ.d.e.z ducã lineã.b.g.equidistãtẽ d.f.q secet diametrũ.d.e.in pũcto.h.a quo.h.pducã equidistãte linee.a.b.que sit h.k.secans.d.f. in pũcto.m.z.c.e.in pũcto.l.z producã.a.k. equidistantem.c.l. eritq; per.36.primi.a.l.equale.c.h. At.c.h.erit equale.h.f.per.43.primi.quare.a l.e equale.h.f.ergo addito.c.m.vtrobiq; erit.a.m. equalis toti gnomoni circũstã ti.l.g.quare.l.g.addito vtrobiq; erit.a.m.cũ.l.g.equale toti quadrato.c.f.z quia vtraq; duaz superficieru.l.g.z.b.m.e quadrata: p corelariũ.4.hui9 p3 propositũ.

Propositio .7.



Si linea in duas partes diuidat.qd fit ex ductu totius i se ipsam cum eo qd est ex ductu alterius partis i seipsam. e/ quum est q eis ex ductu totius linee i eandem partem bis z ex ductu alterius partis in seipsam.

Sit linea.a.b.diuisa in duas partes in puncto.c. dico q quadra/ tum totius.a.b.cũ quadrato.b.c.equũ est ei qd fit ex.a.b.in.b.c.bis cum quadra to.a.c.describatur quadratũ totius qd sit.a.b. d.e.z ducatur diametrum.b.d.z

Las proposiciones II.5, II.6 y II.7 del *álgebra geométrica* del Libro II de los *Elementos* de Euclides en la edición de E. Ratdolt (Venecia, 1482).

El Libro II de los *Elementos* trata del *álgebra geométrica*, que operaba directamente con las figuras, que eran tratadas como magnitudes. Los números son tratados como segmentos de recta y las operaciones entre ellos se realizan mediante construcciones geométricas. El estudio de las relaciones entre los rectángulos o cuadrados de la misma altura construidos sobre la suma o la diferencia de dos segmentos permite la solución geométrica de las ecuaciones cuadráticas.

des, y pocas más. Además, de acuerdo con el punto de vista de la filosofía platónica, la geometría griega, con la excepción de la de Arquímedes, adquirió un carácter excesivamente estático, como consecuencia del papel muy escaso que tuvieron en la ciencia griega los conceptos de movimiento y variación continua de cantidades. Así por ejemplo, para Euclides, un círculo no es el resultado de un movimiento de giro de un segmento en torno a uno de sus extremos, sino el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo. El concepto se expresa así en lenguaje platónico, mediante la descripción de la esencia y no mediante la descripción del fenómeno de la generación del círculo, es decir, en términos ontológicos y no en términos físicos.

18 Los irracionales de Teeteto

"El Libro X, el más extenso de la obra de Euclides es la contestación, en sentido amplio, al problema de la irracionalidad en la forma propuesta por Teeteto. [...]. Ha sido considerado a menudo comparado con algún capítulo de la moderna teoría de los números algebraicos".

B. Levi. *Leyendo a Euclides*,
Zorzal, 2001, pág. 217

Tanto Proclo como Pappus atribuyen a Teeteto gran parte del contenido del Libro X de los *Elementos* que trata de la clasificación sistemática de segmentos inconmensurables en los que intervienen expresiones con raíces cuadradas, obteniendo resultados que son los equivalentes geométricos de propiedades de los números que hoy denominamos como irracionales cuadráticos. Entre estos teoremas hay algunos que expresan la racionalización de denominadores en fracciones de diversos tipos, la construcción con regla y compás de segmentos dados por raíces cuadradas y por raíces cuadradas de sumas de raíces cuadradas.

202 *EUCLIDIS Elementorum*

a 3. ax. 10. b 1. def. 10. — 1. *Hyp.* Si fieri potest, sit D ipsarum AC, AB communis mensura. [a] ergò D metitur AC — AB (BC). [b] ergò AB ⊤⊥ BC, contra Hypoth.

c 16. 10. — 2. *Hyp.* Dic AB ⊤⊥ BC, [c] ergò AC ⊤⊥ AB, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc etiam, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliquæ incommensurabilis erit.

PROP. XVIII.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales AB, GK; *quartæ autem parti quadrati, quod sit à minori* GK, *æquale parallelogrammum* ADB *ad majorem* AB *applicetur, deficiens figurâ quadratâ, & in partes* AD, DB *longitudine commensurabiles ipsam dividat, major* AB *tanto plus poterit quàm minor* GK, *quantum est quadratum rectæ lineæ* FD *sibi longitudine commensurabilis: Quòd si major* AB *tanto plus possit, quàm minor* GK, *quantum est quadratum rectæ lineæ* FD *sibi longitudine commensurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod sit à minori* GK, *æquale parallelogrammum* ADB *ad majorem* AB *applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes* AD, DB *longitudine commensurabiles ipsam dividet.*

a 10. 1. b 28. 6. c 8. 2. d constr. & 4. 2.

[a] Biseca GK in H; & [b] fac rectang. ADB = GHq: abscinde AF = DB. Estque ABq [c] = 4 ADB [d] (4 GHq, vel GKq) + FDq. Jam primò,

Página de la proposición 18 del Libro X de los *Elementos* de Euclides en la edición latina de Isaac Barrow (Londres, 1655). Un ejemplar de esta edición fue manejado por Newton y en él dejó su impronta en unas notas manuscritas.

El Libro X de los *Elementos* es el único documento disponible de las investigaciones de los griegos sobre las magnitudes irracionales desde el punto de vista aritmético. Con sus 115 proposiciones es el más extenso de todos, siendo su tema general una clasificación escrupulosa de las primeras longitudes irracionales originadas en la técnica de la *aplicación de las áreas* a partir de una determinada longitud tomada como unidad, aunque este término no aparece de forma explícita en el mismo.

Hasta la aparición del álgebra simbólica, el Libro X fue uno de los más ponderados por los matemáticos. La forma puramente cualitativa con que Euclides describe algunos irracionales hace que este libro resulte realmente muy difícil de estudiar, además de requerir una gran atención y esfuerzo. Por esta razón Stevin lo calificó como la "*cruz de los matemáticos*" (*Le premier livre d'Arithmétique*, def. XXXI, *Oeuvres mathématiques*, Leyden, 1634).

El Libro X comienza con cuatro definiciones. En la primera se explica lo que son segmentos *conmensurables* e *inconmensurables* –que tienen o no una medida común– y en la segunda se definen también magnitudes "*conmensurables en cuadrado*" que son las que sus cuadrados tienen una medida común.

La proposición más importante del Libro X es precisamente la primera, llamada el *principio de Eudoxo*, que es una de las más relevantes de las 465 que contienen los *Elementos* ya que, como se ha visto, sobre ella descansa el *método de exhaución* de Eudoxo que Euclides y Arquímedes aplican sabiamente para demostrar los resultados sobre cuadraturas y cubaturas.

Sorprende, pues, la ubicación aislada de esta proposición en este lugar de los *Elementos*, ya que apenas presta un servicio hasta el Libro XII. Tal vez se pueda justificar su situación aquí como paso previo a la proposición X.2 donde se muestra el procedimiento para determinar si dos magnitudes son conmensurables o inconmensurables:

"Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables".

Euclides da un criterio de inconmensurabilidad mediante el llamado proceso de *antiphéresis*, basado en la *sustracción sucesiva*, similar al algoritmo aritmético euclídeo para el cálculo del *máximo común divisor* de la proposición VII.2: "*Dos magnitudes son inconmensurables si el proceso de antiphéresis no tiene fin*".

En la siguiente proposición, la X.3, Euclides halla mediante el proceso de *antiphéresis* la medida común de dos magnitudes conmensurables. Las proposiciones siguientes hasta la 17 estudian propiedades generales de magnitudes conmensurables e inconmensurables. De la 17 a la 21 se tratan las relaciones entre la conmensurabilidad de los lados y las de los cuadrados y rectángulos construidos sobre ellos.

En la proposición 21 empieza el estudio de distintos tipos de inconmensurables y se introduce el "*segmento medial*", que es la media proporcional de dos segmentos *conmensurables en cuadrado* (es decir, de la forma $\sqrt{a\sqrt{b}}$, donde a y b son fracciones numéricas). Las proposiciones que van hasta la 35 relacionan los *segmentos mediales* con líneas o rectángulos y estudian cuando son *conmensurables en cuadrado*.

A partir de la proposición 36 y hasta la 72 se estudian hasta doce categorías de expresiones irracionales llamadas *binomiales*, que son de la forma $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, siendo a y b conmensurables.

Desde la proposición 73 hasta la 110 se estudian las llamadas expresiones *apótomas* similares a las *binomiales* pero siendo – el signo del radicando, es decir, $\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

En ambos casos, Euclides estudia las diversas posibilidades en que estas expresiones radicales pueden ser simplificadas, sobre lo que basa su clasificación. Como en otros muchos aspectos relativos al Libro X, no está nada clara la utilidad y motivación euclídeas para el estudio de estas expresiones. Tal vez servían para la resolución geométrica de ecuaciones cuadráticas o bicuadradas. Algunos resultados del Libro X se aplican al estudio de las relaciones entre los lados y diagonales del pentágono, el hexágono y el decágono regulares con el diámetro del círculo circunscrito, conforme a un determinado patrón de conmensurabilidad/inconmensurabilidad. Las expresiones radicales del Libro X también se utilizan en el Libro XIII –cuyo contenido tiene su origen, asimismo, en Teeteto– para buscar las aristas de poliedros regulares inscritos en una esfera. Por ejemplo, las apótomas se utilizan explícitamente en las proposiciones XIII.16 y XIII.17 en la construcción de un icosaedro y un dodecaedro, respectivamente, inscritos en una esfera.

Realmente es algo misterioso el que una mente preclara como Euclides no haya dilucidado la misión del Libro X dentro del sistema compilador y enciclopédico de los *Elementos*, lo que ha propiciado muchas interpretaciones, empezando por el carácter aritmético o geométrico, en el sentido de que hubiera sido concebido como una continuación de los tres libros aritméticos VII, VIII y IX, o que estos tres eran una laguna entre los diez restantes, que serían geométricos, incluyendo en esta condición el Libro X. De hecho, algunas versiones de los *Elementos* se resisten a utilizar en el Libro X los términos racional/irracional –que, de acuerdo con el lenguaje actual, le darían un sesgo aritmético– y utilizan sólo los términos conmensurable/inconmensurable. Esto es una cuestión más que lingüística, incluso filológica, a tener en cuenta en las traducciones, porque el término irracional en Euclides –y en general en la cultura griega– significa *no expresable mediante razones*, es decir, algo ininteligible, –*alogon*–, lo que está fuera del *logos*, la sinrazón.

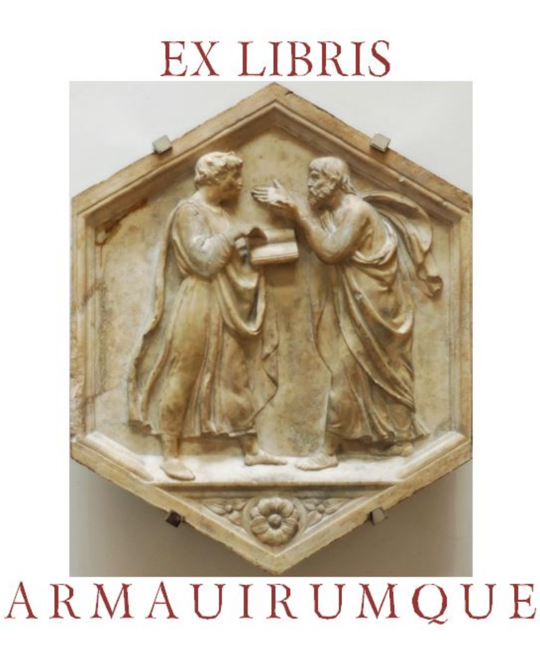
La reflexión sobre estas cuestiones puede dar una idea de la conmoción cultural que pudo suponer la súbita aparición de las magnitudes inconmensurables en el horizonte pitagórico, más allá incluso de la quiebra de las concepciones filosóficas pitagóricas y de la ruina lógico-matemática de las pruebas geométricas que implicaban proporciones. Por lo aducido en este sentido, la condena al ostracismo del término *irracional* en el Libro X podría ser tanto una mutilación como un anacronismo.

La oscura, intrincada, problemática y hasta confusa organización del Libro X ha propiciado diversas interpretaciones sobre su significado como encrucijada en los *Elementos*. Importantes pensadores e historiadores modernos de las matemáticas –Heath, Van der Waerden, Mueller, Fowler, Knorr...– han dado sus juicios al respecto. Mencionemos la opinión de B. Levi (*Leyendo a Euclides*, Zorzal, Buenos Aires, 2001, pág. 217) que llega a atribuir a Teeteto la intuición o génesis de la idea moderna de la ampliación algebraica de campos numéricos:

> "*Cuando Teeteto en el diálogo platónico* [*Teeteto*, 147d] *enuncia con toda generalidad la condición para que la raíz cuadrada de un número entero sea irracional, agrega sin mayores explicaciones: "lo mismo hicimos para los sólidos". Esto significa que el problema de ver cuán amplio fuera el campo de lo irracional estaba delante*. [...]. *El Libro X proporciona una contestación más amplia indicando cómo siempre el mismo procedimiento de extracción de raíces permite ampliar indefinidamente con nuevas irracionalidades un campo numérico deducido de los irracionales por un número finito de tales operaciones*".

Todo el contenido del Libro X está incorporado a la literatura matemática actual, aunque en una forma muy diferente, con unos procedimientos algebraicos mucho más operativos, generales e inteligibles que los métodos particulares desarrollados por Euclides

para manejar los números irracionales. Una vez creada una teoría general para dichas magnitudes pierde importancia lo referido de forma exclusiva a una especie particular. Por ello gran parte del Libro X no tiene en la actualidad demasiado interés. No obstante, el prolijo trabajo desarrollado por Euclides, fruto de un esfuerzo riguroso, tenaz y minucioso, tiene un interés histórico, toda vez que refleja una etapa importante en la evolución del pensamiento matemático griego.



19 El idealismo platónico

"Los Elementos de Euclides aparecen como el fruto de las concepciones del círculo de matemáticos y filósofos de la Academia platónica, [...]. *La geometría de Euclides* está latente *en el pensamiento expresado en los Diálogos de Platón*".

B. Levi. *Leyendo a Euclides*,
Zorzal, 2001, pág. 16

A lo largo de las páginas anteriores hemos señalado a los *Elementos* de Euclides como marco ineludible de referencia al ser el receptor de una gran parte de la matemática desarrollada por los matemáticos de la Academia platónica.

El reiteradamente aludido texto de Proclo, *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides,* nos informa sobre la naturaleza de la actividad matemática de los miembros de Academia platónica en una forma que nos permite entender la decisiva influencia sobre Euclides, no sólo por la esencia de la matemática desarrollada en la Academia sino también por la metodología de trabajo:

"[Los matemáticos de la Academia de Platón] *multiplicaron los teoremas y los pusieron en un orden más sistemático*. [...]. *Ampliaron considerablemente los conocimientos precedentes y compusieron Elementos* [...]. *Perfeccionaron el conjunto de la geometría al convertir en generales muchas definiciones y proposiciones particulares*. [...]".

A veces se cree que los *Elementos* contienen un resumen sumario y exhaustivo de toda la geometría griega; pero en realidad la obra de Euclides es un compendio, en lenguaje geométrico, de todos los conocimientos de la matemática elemental, es decir, por una parte, la geometría sintética plana –puntos, rectas, polígonos y círculos– y espacial –planos, poliedros y cuerpos redondos–; y, por otra parte, una aritmética y un álgebra, ambas con una indumentaria geométrica. Así pues, los *Elementos* son una exposición en orden lógico de los fundamentos de la matemática elemental y no contienen, por ejemplo, el estudio de las cónicas de Menecmo ni de otras curvas planas superiores, que eran bien conocidas y utilizadas ya en la época de Platón en la resolución de problemas geométricos considerados de naturaleza superior, como los *tres problemas clásicos* –cuadratura del círculo, duplicación del cubo y trisección del ángulo–. A este respecto escribe Proclo en su *Comentario* sobre Euclides:

"*Son singularmente admirables sus Elementos de geometría por el orden que reina en ellos, la selección de los teoremas y problemas tomados como elementos –pues no insertó en modo alguno todos los que podía dar, sino únicamente aquellos que son susceptibles de desempeñar el papel de elementos–, y también la variedad de los razonamientos desarrollados de todas las maneras y que conducen a la convicción, ya partiendo de las causas, ya remontándose a los hechos, pero que son siempre irrefutables, exactos y del más científico carácter*".

Para Proclo, los *Elementos* debían contener las proposiciones imprescindibles para forjar un *corpus* geométrico básico que ofreciera una línea directriz del desarrollo deductivo de donde poder progresar más allá de los conocimientos adquiridos para poder derivar los nuevos resultados que se pueden obtener en todas la ciencias matemáticas. Así pues, los *Elementos* no contendrían la totalidad de todo el saber matemático de la época sino sólo una parte esencial, cuidadosamente seleccionada, bajo un estricto criterio platónico prefijado, que convirtió una serie de conocimientos anteriores, muy dispersos, en un sistema unitario, estructurado y jerarquizado según un método, llamado axiomático, preconizado ya en el *Organon* aristotélico como único a seguir en toda ciencia deductiva y que resultó ser más tarde el método general utilizado en las matemáticas y en otras ciencias.

Pero ¿cuál sería el propósito de Euclides al escribir los *Elementos*? El mismo Proclo al final de su *Comentario* nos dice algo al respecto:

> "*Los Elementos son una guía segura y completa para la consideración científica de los objetos de la geometría*".

Y en un párrafo anterior Proclo escribe:

> "*Euclides dio los procedimientos que emplea la perspicaz inteligencia y por los cuales es posible ejercitar a los principiantes en el estudio de la geometría para que reconozcan los paralogismos y eviten los errores*".

El propósito de Euclides al escribir los *Elementos* sería, pues, de índole metodológico, construyendo una especie de manual a base de estructurar en una secuencia jerárquica lógica los resultados geométricos de sus antecesores, en particular los de Tales, Pitágoras, Hipócrates y Demócrito, y sobre todo, según Proclo, los de los matemáticos platónicos Eudoxo y Teeteto. En efecto, Proclo escribe en otro párrafo de su *Comentario*:

"Euclides, el autor de los Elementos ordenó diversos trabajos de Eudoxo, mejoró los de Teeteto y produjo también demostraciones irrefutables para aquello que sus predecesores no habían probado de manera rigurosa".

A la vista de todo lo expuesto anteriormente, debemos ponderar la magnifica contribución de los matemáticos de la Academia de Platón al acervo matemático euclídeo. Debemos observar, además, que, tras la aparición de los inconmensurables, la Academia debió participar también en las nuevas demostraciones que exigían los teoremas pitagóricos de los cuatro primeros libros. Pero más allá del propio contenido matemático de los *Elementos*, con ser esencial y fundamental, hemos de atribuir a Platón y la Academia una intervención importante tanto en el espíritu como en el estilo y la metodología de la obra euclídea.

Aparte de su posible formación de juventud en la Academia de Atenas, Euclides recibiría en Alejandría, como miembro destacado del *Museo* y la *Biblioteca,* la influencia aristotélica y, sobre todo, la platónica, que había estipulado el idealismo científico y que marginaba la dimensión sensible de la realidad y las aplicaciones prácticas de la geometría y la aritmética por considerarlas contrarias al espíritu que debe animarlas (*La República*, 527a). Las ciencias, sobre todo las matemáticas, deberían basarse por entero en lo inteligible, en el puro razonamiento y ser independientes de toda experiencia sensible y de todo aspecto práctico y material de la realidad sensorial. Así lo declara Proclo cuando escribe en su *Comentario*:

"Euclides era platónico en cuanto a su opinión y la filosofía del maestro le era muy familiar, [...]".

Lo que parece confirmarse con el esplendor del punto culminante de los *Elementos*, la exhaustiva y casi monográfica dedicación del último Libro a los *sólidos platónicos*, como queriendo dar con-

sistencia geométrica a la doctrina mística del *Timeo* de Platón. Más aún, la propia dedicación de los tres últimos libros de los *Elementos* a la estereometría podría interpretarse como una satisfacción que Euclides pretendía dar al maestro Platón, que se había quejado en *La República* (528b) de su exiguo estudio en todas las polis griegas, a pesar de que *tiene un encanto extraordinario.*

Los *Elementos* de Euclides son un producto del pensamiento platónico en el que el sabio alejandrino materializa el programa idealista que Platón había desarrollado en la Academia. De hecho, los *Elementos* representan la culminación del idealismo platónico en matemáticas. Es más, para los griegos la raíz etimológica del término geometría sería incluso paradójica porque geometría significa *medida de la tierra*, pero fueron precisamente los geómetras griegos quienes la independizaron de tal menester y de cualquier otra finalidad práctica, a lo que dedicaban la actividad artesanal llamada *geodesia*. Para los griegos, las actividades más dignas desde una perspectiva intelectual eran las que, como en su geometría, carecían de utilidad inmediata y atendían sólo a la curiosidad intelectual mediata presidida por la reflexión serena, independiente de todo pragmatismo y no espoleada por la urgencia biológica de la satisfacción de las necesidades vitales inmediatas.

En este sentido, los *Elementos* consuman el proceso –que empieza con los pitagóricos y se afianza con los platónicos– de transformar el saber geométrico en disciplina puramente teórica, que investiga los teoremas de manera inmaterial, es decir, intelectualmente libre de instrumentos y mediciones, sin referencia a materiales concretos y sólo por medio de la intuición de ideas y del discurso mental que se remonta a los principios generales y estudia los teoremas de forma abstracta mediante la inteligencia pura. Esto es lo que significa para los griegos que las matemáticas son una "*ciencia liberal y desinteresada*", independiente de toda práctica empírica, de la utilidad inmediata y de toda aplicación de instrumentos materiales, con la sublime *misión pedagógica de formar mentes bien hechas,*

para cumplir [según Platón] *con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la filosofía*. (*La República*, 525a-534a).

A este respecto recordemos la anécdota de Euclides y el pragmático discípulo que interrogaba al maestro con la consabida pregunta:

– "*¿Para qué sirve estudiar geometría?*".

Euclides llamo su esclavo y le dijo:

– "*Dale unas monedas a éste, ya que necesita sacar provecho de lo que aprende*".

Según escribe B. Levi en su obra *Leyendo a Euclides* (Zorzal, 2001, pág. 61):

"*Los Elementos de Euclides construyen, por primera vez, la geometría fuera del dominio de los objetos físicos, sobre ideas primitivas (según el término moderno) que sólo actúan por sus propiedades explícitamente enunciadas (nociones comunes, axiomas, postulados, los que Sócrates llama repetidamente hipótesis*)".

En efecto, todo el conjunto de proposiciones y construcciones del sistema euclídeo se deduce, sin otro recurso que la lógica, de un reducido número de principios que han de admitirse sin demostración. El sistema y el método euclídeos fue de tal fecundidad que la obra euclídea eclipsó otros *Elementos* redactados con anterioridad –se cree que hasta cinco en el seno de la Academia platónica, cada uno readaptando los anteriores–, y además, con posterioridad a Euclides no se conocen, durante más de dos mil años, obras de naturaleza similar, signo manifiesto de su éxito como texto científico y didáctico.

El instrumento básico que le permitió a Euclides componer su magnífico edificio fue la lógica de Aristóteles, que actuando como cemento vinculaba con una ilación impecable unas proposiciones a

otras. El *Organon* aristotélico debió de inspirar a Euclides el modelo a seguir para construir el andamiaje lógico de su obra, ya que según Aristóteles:

> "*La geometría es una ciencia deductiva o racional, es decir, que puede adoptar la forma de un sistema de conclusiones obtenidas de un cierto número de premisas fundamentales por medio de sucesivos silogismos*. [...]. *Los fundamentos de la geometría son, pues, los axiomas, las definiciones y las hipótesis*".

A este respecto, escribe también B. Levi (*Leyendo a Euclides*, pp. 83-84):

> "*Una de las características de los Elementos de Euclides es la conducta lógica formal de la exposición, que recuerda la teoría aristotélica del silogismo: sistemática división de proposiciones; en cada proposición enunciación primero de una tesis en términos generales; luego nueva enunciación aplicada a una figura particular. Finalmente demostración sobre la figura. La demostración dividida en una serie de conclusiones particulares en cadena y terminando regularmente con la afirmación lo que se quería demostrar*".

Por otra parte, más allá de la metafísica y la lógica aristotélicas, el espíritu de los *Elementos* de Euclides rezuma por doquier un aroma platónico. Una de las características de la geometría de los *Elementos* es precisamente la imposición de limitaciones a los conceptos y formas de razonamiento para escapar del empirismo. En este sentido continúa el texto de B. Levi (*Leyendo a Euclides*, pp. 83-84):

> "*Es bien posible que tal formalismo* [euclidiano] *imitara de cerca algo de la dialéctica sofística y por nada es absurdo que tal forma adoptara un discípulo de* Sócrates [En sentido figurado, Euclides, discípulo de Sócrates a través de Platón], *el fustigador de sus contemporáneos sofistas, pues lo que*

Sócrates combate no es la forma, que hasta cierto punto conserva él también en sus análisis dialogados, sino el error que se oculta en deducir, por razonamientos formalmente exactos, de premisas variables y engañosas; valía la pena mostrar qué distinto es el resultado cuando se parte de axiomas claros y unívocos. La maravilla de los Elementos consistía precisamente en demostrar, con el ejemplo, cómo podía la inteligencia del hombre, guiada por el razonamiento riguroso, llegar de esas pocas premisas simples a las verdades que el secular conocimiento empírico podía haber enseñado. Sócrates en La República asigna a la Dialéctica la tarea de fundar los axiomas".

Siguiendo la orientación del pensamiento platónico de *La República* (510d-510e), a lo largo de los *Elementos* no aparece ni una sola aplicación práctica. Tampoco figura ejemplo numérico alguno, a pesar de que el tratado tiene tres libros de aritmética (VII, VIII y IX) donde los números están disfrazados de segmentos y las operaciones entre ellos se realizan a través de construcciones geométricas.

Aunque suele decirse que la geometría de Euclides es la *geometría de la regla y el compás*, debe entenderse como metáfora, ya que no hay en los *Elementos* ninguna mención a estos instrumentos ni a ninguna otra herramienta geométrica material. En puridad, habría que decir que la geometría de Euclides sólo admite construcciones con rectas y circunferencias y veta todo instrumento geométrico, de acuerdo con la condena de todo pragmatismo en la filosofía platónica que trasluce el pasaje de Plutarco (en *Vidas paralelas*: *vida de Marcelo*, XIV), en el que Platón se indigna con Eudoxo por su utilización de instrumentos mecánicos en geometría.

En la filosofía platónica las matemáticas no deben tener otro objeto que el conocimiento en sí mismo. Así lo manifiesta, una y otra vez, de forma reiterada, Platón en varios pasajes de *La República*. El carácter de la matemática como ciencia del conocimiento en sí se

Euclides, un platónico en Alejandría



Euclide immaginato.
J. van Ghent (siglo XV).

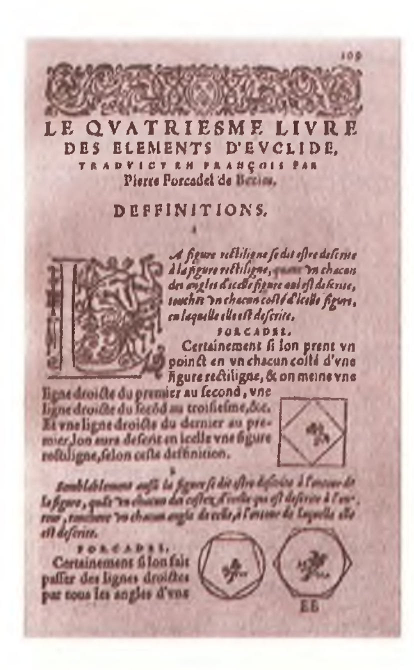
Los exiguos datos biográficos sobre Euclides se reducen a unos pocos comentarios y algunas anécdotas de incierta fiabilidad. Hacia el año 300 a.C. Euclides debió de llegar a Alejandría, requerido como profesor por las instituciones docentes del Museo, y allí vivió el resto de su vida enseñando matemáticas y escribiendo diversas obras sobre geometría.

Por la naturaleza de su obra, Euclides habría estudiado probablemente con los discípulos de Platón y tal vez en la Academia misma, donde habría conocido los últimos resplandores de su foco científico, siendo responsable de su irradiación hacia la nueva sede del saber, Alejandría.

Bajo una orientación matemática platónica, a Euclides le cabe el inmenso mérito de la ordenación y sistematización de la geometría griega elemental, de manera que, con independencia de sus aportes originales, su mayor contribución se le reconoce como gran compilador y creador de un estilo de exposición –el método axiomático-demostrativo–. En lenguaje actual diríamos que Euclides es un gran maestro y su obra fundamental un libro de texto *que establece un férreo paradigma de exposición y de demostración en matemáticas.*

constata por su propia etimología, que significa *conocer* o *aprender*, antes de que el término derivado, en plural, *matemáticas* adquiera el sentido más específico que nosotros le damos actualmente, como ciencia del número y la extensión. Así pues, las matemáticas, según los griegos, deben estudiarse por amor al propio saber, es decir deben cultivarse por filosofía y para la filosofía.

En este sentido escribe el famoso matemático y profesor Félix Klein, en su famosa y ya mencionada obra dedicada a la formación de los docentes, *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Geometría* (Biblioteca matemática. 1931. pág. 253), las siguientes reflexiones sobre Euclides:



109

LE QVATRIESME LIVRE
DES ELEMENTS D'EVCLIDE,
TRADVICT EN FRANÇOIS PAR
Pierre Forcadel de [illegible].

DEFFINITIONS.

1

La figure rectiligne se dit estre descrite à la figure rectiligne, quant vn chacun des angles d'icelle figure qui est descrite, touche vn chacun costé d'icelle figure, en laquelle elle est descrite.

FORCADEL.

Certainement si lon prent vn poinct en vn chacun costé d'vne figure rectiligne, & on meine vne ligne droicte du premier au second, vne ligne droicte du secōd au troisiesme, &c. Et vne ligne droicte du dernier au premier, lon aura descrit en icelle vne figure rectiligne, selon ceste deffinition.

2

Semblablement aussi la figure se dit estre descrite à l'entour de la figure, quant vn chacun des costez d'icelle qui est descrite à l'entour, touchent vn chacun angle de celle, à l'entour de laquelle elle est descrite.

FORCADEL.

Certainement si lon fait passer des lignes droictes par tous les angles d'vne

EE

"El papel verdadero de los Elementos de Euclides fue el de una introducción al estudio de la geometría y de la matemática en general, con la tendencia de tratar ésta según las ideas de la escuela platónica, como preparación para estudios filosóficos generales. Así se comprende la razón de que la obra fundamental esté escrita atendiendo en primer lugar a la conexión lógica, que ha de dar por fruto un sistema completo de geometría, mientras que las aplicaciones prácticas estén excluidas sistemáticamente".

Primera página del Libro IV de la primera edición en francés de los *Elementos* de Euclides. Se debe a Pierre Forcadel de Béziers (París, 1565).

20 La influencia de Platón

"Pese a no ser el primer idealista, Platón fue capaz de presentar sus opiniones en forma de unos diálogos de una belleza y persuasividad tales que jamás han sido superados en los escritos filosóficos".

J. Bernal. *Historia social de la ciencia*,
Península, Barcelona, 1979. Vol. 1. pág. 162)

Todavía se discute con vehemencia el papel de Platón en la historia del pensamiento. Su concepción de la filosofía, la ciencia y las matemáticas son una fuente de debates donde se ensalza o se combate su actitud. Para algunos, el fundador de la Academia es un pensador excepcionalmente profundo e incisivo, mientras que para otros es un fabulador que seducía a los hombres para apartarlos de los problemas cotidianos y los embarcaba en especulaciones inútiles. Para muchos, la influencia de Platón es tan positiva en la filosofía como negativa en las matemáticas.

Empecemos por referir algún punto de vista, digamos muy extremista, sobre la influencia negativa de Platón en la historia del pensamiento. Es paradigmática, a este respecto, la opinión de L. Hull, en su famosa obra *Historia y filosofía de la ciencia*. (Ariel, Barcelona, 1981. pp.71-72):

"La actitud de Platón hacia la matemática fue de gran pedantería, y su influencia sobre ella fue reaccionaria. Ante todo acaso no haya habido otro hombre que haya admirado tanto a las matemáticas por su carácter no mundanal, no sensorial, por su contexto de ideas y no de cosas. Por este camino el pensamiento de Platón no podía llegar a concebir correctamente el papel de la matemática en la ciencia. Se limitó en efecto a considerar el aparato de desarrollo puramente intelectual de la demostración y la construcción matemáticas, creyendo ver en él el modelo, dado por Dios, de todo proceder científico, en cualquier rama del saber. Platón no se interesó nunca por la aplicación detallada de las matemáticas a los resultados de la observación. Y sin duda no debe reprocharse a Platón que pensara que la matemática es digna de estudio por sí misma. Para el aficionado a la matemática, ésta, como cualquier arte, es una fuente de sutil placer. Lo que sí puede en cambio condenarse en Platón como fruto de su lamentable estrechez mental es su ignorancia de la aplicación práctica de las matemáticas; pues a ignorancia debe atribuirse el error básico de Platón, que consiste en creer que la matemática es universalmente aplicable en cuanto método deductivo".

"Platón consideraba la matemática como una disciplina académica y estableció un código que precisaba lo que no debe hacer un matemático respetable: no debe rebajarse al cultivo de la matemática aplicada".

"El hombre que crea dificultades artificiales a la investigación, en vez de abrirle nuevo suelo, merece justamente el

calificativo de pedante. Las restricciones en cuestión [los únicos instrumentos legítimos del geómetra eran la regla y el compás] *no tenían más justificación que la voluntad de Platón. En cuestión de matemáticas, Platón ha sido un influyente maestrillo que no ha permitido más librillo que el pésimo suyo".*

"La reputación de Platón era tan considerable en otros terrenos que pudo ejercer esta esterilizadora influencia en el de la matemática, influencia aumentada por el hecho de que Euclides aceptó en líneas generales el código matemático de Platón".

Tampoco sale muy bien parada la actitud de Platón hacia la ciencia en la obra de J. Bernal *Historia social de la ciencia* (Península, Barcelona, 1979. Vol. 1. pp. 162-166):

"Para Platón existe una triada de valores absolutos: verdad, bondad y belleza, con la pretensión de ser superiores a los sentidos y hallarse más allá de todo conocimiento derivado de éstos siendo utilizados para limitar la investigación científica y para apoyar las opiniones intuitivas, místicas y reaccionarias".

"Platón no parece haber contribuido mucho por sí a las matemáticas, pero no hay duda de que su influencia le dio gran prestigio, orientando más tarde hacia ellas a muchas mentes bien dotadas. No obstante, al ser deliberadamente abstracto y contemplativo, alejó a las matemáticas de su origen y de su aplicación a la experiencia práctica, retardando de este modo el desarrollo del Álgebra y la Dinámica".

"Con una terrible pérdida para la ciencia, Platón combinó las matemáticas con la Teología. [...] *La filosofía de Platón rechazó la ciencia, sustituyéndola por la fe".*

"*La insistencia de Platón en las matemáticas, aseguró por lo menos* [en la Academia] *la presencia de una disciplina científica en la que de otro modo hubiera sido una educación puramente literaria*".

Todavía con más acritud escribe sobre Platón un gran conocedor de la matemática griega, F. Vera, en su obra *Breve historia de la geometría*. (Losada, Buenos Aires, 1963. pág. 42):

"*La autoridad personal de Platón, el prestigio de la Academia y el grupo de aristócratas holgazanes que le admiraba, hicieron que tan disparatadas opiniones* [sobre la cosmogonía platónica] *se consideraran indiscutibles, sin pararse a pensar que, encerradas en ellas, la geometría se convertía en un estéril ejercicio mental, en una curiosidad infecunda cuyo único objeto era llenar las horas vacías de una casta social, económicamente privilegiada, que creía tener derecho a vivir al margen de toda inquietud que no fuese el cosquilleo de sutilezas que impidieron el desarrollo de la ciencia positiva, porque contemplaron el mundo con ojos de poeta en vez de contemplarlo con ojos de científico. Miraron, pero no vieron, y a tanto llegó su ceguera mental que Platón hizo de la geometría de la esfera una explicación mágica del origen del hombre.* [...] *La sustitución de la realidad física por la magia agradaba a los intelectuales ociosos que rodeaban a Platón, y fue lamentable porque la geometría dejo de ser una actividad científica y socialmente provechosa*".

Mencionemos, para compensar, alguna opinión más neutral y ajustada, como las palabras de B. Farrington en su obra *Ciencia griega* (Icaria, Barcelona, 1979, pág. 99):

"*Platón no sólo no hizo aporte alguno a la ciencia positiva, sino que contribuyó a desalentarla. Esto no significa que*

no hiciera aportes al pensamiento. Fomentó el estudio de la matemática, elemento esencial de la concepción científica moderna. Desarrolló el estudio de la lógica más que todos los pensadores que le precedieron. Su crítica al papel de la percepción sensorial y de la mente en el proceso de conocimiento de lo exterior, hizo época. [...] *Su larga serie de diálogos, que abarcan variados aspectos de la vida y del pensamiento humanos, con lenguaje tan sutil y potente, constituye un legado imperecedero para la humanidad".*

Quizá nadie podría presumir más de ecuanimidad y conocimiento, hablando de Platón, que Bertrand Russell, filósofo y matemático –como Platón–, y magnífico escritor –también como Platón–, premio Nobel de literatura en 1950. Recordemos algunas de sus frases de los capítulos dedicados a Platón en su Historia de la filosofía occidental (Espasa Calpe. Madrid, 1995. Vol. 1):

"*Siempre estuvo de moda elogiar a Platón sin entenderle. Este es el destino común de los grandes hombres*". (pág. 142).

"*Ante la pregunta ¿Qué es un filósofo? De acuerdo con la etimología es un amante de la sabiduría. Pero esto no es lo mismo que amante de la ciencia, en el sentido que se daría a una persona inquisitiva. La vulgar curiosidad no hace al filósofo. Platón corrige, pues, la definición: filósofo es un hombre que ama la visión de la verdad*". (pág. 147).

"[Así pues] *Para Platón la filosofía es una especie de visión, la visión de la verdad, no es puramente intelectual, no es sólo sabiduría, es amor a la sabiduría,* [...] *es una unión íntima de ideas y sentimientos".* (pág. 159).

"La doctrina de las ideas señala un gran avance en la filosofía, puesto que es la primera teoría que destaca el problema de los universales, el cual, bajo diversas formas ha llegado hasta nuestros días". (pág. 162).

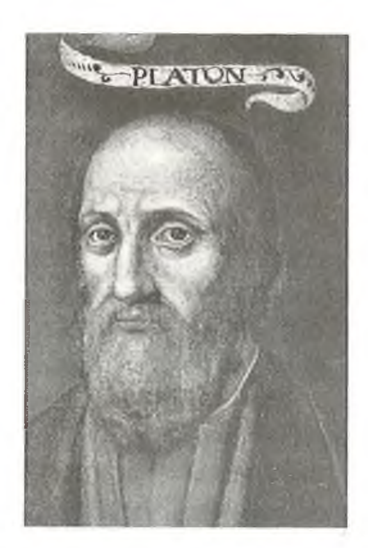
"Es notable que los platónicos modernos, con pocas excepciones, no sepan matemáticas, a pesar de la inmensa importancia que Platón mismo atribuyó a la aritmética y a la geometría, y de la influencia inmensa que habían tenido sobre su filosofía. Es un ejemplo de los inconvenientes de la especialización: nadie debería escribir sobre Platón, a menos de haber pasado tanto tiempo en el estudio de la matemática griega como para que no haya obviado ninguna de las cosas que Platón consideraba importantes". (pág. 167).

"Para Platón el conocimiento es más reminiscencia que percepción". (pág. 142).

"Coincido con Platón en que la aritmética y la matemática pura, no se derivan de la percepción. [...] *La verdad matemática es, como defiende Platón, independiente de la percepción"*. (pág. 190).

A pesar de todas las críticas sobre la actitud ante la ciencia del fundador de la Academia, muchas de ellas de una gran acerbidad, debemos conceder a Platón el gran mérito de ser el filósofo que más ha reflexionado sobre la naturaleza de los entes matemáticos y de los vínculos que establecen con los distintos ámbitos de la realidad y los diversos dominios del conocimiento. Pero su matematicismo le llevó a considerar que la realidad y la inteligibilidad del mundo físico sólo se podían aprehender a través de las matemáticas del mundo ideal. Ya no sólo el mundo estaba matemáticamente estructurado, como pensaban los pitagóricos, y la naturaleza sólo se podía comprender mediante el lenguaje matemático, sino que Platón pretende sustituir a la naturaleza misma por las matemáticas.

No se trata de una mera utilización de las matemáticas para explicar mediante relaciones matemáticas las leyes del mundo sensible en que vivimos –como haría Galileo–. De hecho la sorprendente



Platón.
Óleo anónimo del siglo XVI. Biblioteca de la antigua Facultad de Medicina. París.

e inesperada aplicabilidad de las matemáticas en ámbitos imprevistos le da a esta ciencia un capacidad isótropa de intervención, una omnipresencia universal, de modo que parece que las matemáticas forman parte de la esencia de todas las cosas en sentido pitagórico, lo que les confiere un cierto poder místico que impresionaba a los primeros filósofos. Que una ciencia tan abstracta como las matemáticas tuviera tanto que decir acerca del mundo real debía entrañar que toda la naturaleza debía ajustarse a las propias estructuras de las matemáticas. A partir de una mera extrapolación, Platón podía estar convencido de que una mirada penetrante sobre el mundo físico, con los ojos de la razón matemática, era suficiente para captar las certezas básicas que necesita el pensamiento para alcanzar las verdades inteligibles, principios últimos de la realidad. Y en este camino la razón se ayuda exclusivamente de las matemáticas, es decir, estas ciencias sustituyen completamente a las investigaciones físicas. Así ocurre, como hemos visto, en el *Timeo*, donde se realiza una auténtica y arbitraria transferencia de propiedades del mundo matemático al mundo natural que ha tenido una influencia decisiva en la historia de la filosofía, sobre todo en el Renacimiento. De hecho, en el *Timeo*, Platón insiste, como en *La República*, en el papel de las matemáticas como fundamento del saber filosófico (*Timeo*, 39b):

> *De la invención del número hemos derivado la filosofía, el don más grande de los dioses que les ha llegado a los hombres.*

Sobre estas cuestiones, acerca de la visión platónica de los estrechos vínculos de la matemática con la realidad, escribe Bryan Magee en su interesante y didáctica obra de divulgación de la historia del pensamiento filosófico (*Historia de la filosofía*. Blume, Barcelona, 1988, cap. 1, pp. 25, 27):

> *"Ningún aspecto de la realidad circundante es ajeno al interés de Platón, y en ese sentido, las matemáticas y la física aparecen como medios insustituibles a la hora de aproximarse y entender mejor el mundo de las cosas".*

> *"Platón constata que a medida que se profundiza en el conocimiento de la naturaleza, más evidente se hace el estrecho vínculo existente entre las matemáticas y la realidad del mundo. En este sentido, para Platón el cosmos es un perfecto ejemplo del orden, la armonía y la proporción, algo que nosotros ahora podemos corroborar arguyendo que todo fenómeno producido en la naturaleza puede expresarse en términos de ecuaciones matemáticas".*

A pesar de su militante idealismo, Platón no ignora que las matemáticas tienen muchas e importantes aplicaciones en la estrategia militar, en el cálculo, en la artesanía, en la agricultura, en la navegación..., y así lo menciona, por ejemplo, en *La República* (527d), pero no le interesan estos aspectos utilitarios, incluso los censura como contrarios a la verdadera finalidad de las artes matemáticas, que es acostumbrar el alma a la abstracción para conocer la esencia del ser verdadero que la eleva hacia el supremo conocimiento del bien, en el que los sentidos y la experimentación a través de sus observaciones, no deben tener ni siquiera un papel subsidiario, ya que pueden revelar una imagen falsa, confusa y engañosa de la realidad, cuya verdadera esencia sólo se capta por la actividad mental.

Esta actitud de Platón es proverbial en el caso del estudio de la astronomía. Los astros forman un maravillosa policromía que ador-

na el cielo, ejemplo supremo de belleza y orden matemáticos; pero las meras observaciones y explicaciones de sus movimientos como cuerpos sensibles no son sino vulgares e innobles ocupaciones, y no deben ser el verdadero objeto de esta ciencia. Sí debe ser, en cambio, la aprehensión por la razón, por el pensamiento y no por la vista, de los verdaderos números y las verdaderas figuras de los astros ideales que se mueven en un cielo matemático del que el cielo visible es tan sólo una imperfecta imitación (*La República,* 529d). Para alcanzar la verdadera ciencia *dejaremos a un lado las cosas del cielo* (530b), y sólo deberemos considerarlas como meros diagramas auxiliares para la búsqueda de las verdades superiores tal como hacen los matemáticos con sus figuras geométricas (510d). Así que la utilidad de la astronomía para la orientación en la navegación, la elaboración del calendario, la medición del tiempo y la percepción de las estaciones, de gran importancia en la agricultura, no son, según Platón, ocupaciones propias del filósofo para alcanzar la verdadera ciencia.

A pesar de estas concepciones, tan idealistas como peregrinas, la influencia de Platón a través de la historia de la cultura y del pensamiento ha sido inmensa. Una armoniosa combinación del misticismo y panmatematismo pitagóricos, la lógica y la metafísica de Parménides y una herencia socrática directa, basada en una ética y una política fundamentadas en la idea suprema del bien como base de toda una filosofía, forjaron en la mente preclara de Platón una síntesis poderosa que creó una atractiva doctrina de gran originalidad, satisfactoria tanto para el intelecto como para el sentimiento religioso, de ahí la influencia decisiva de Platón no sólo en la mayoría de los grandes filósofos, sino también en los grandes pensadores cristianos, judíos e islámicos.

Por herencia pitagórica hay en Platón un tono religioso acerca de la realidad, que parte del ideal contemplativo que conduce a la creación de las matemáticas puras, con gran influencia sobre la filosofía y allende ésta sobre la teología. El conocimiento matemático,

adquirido sólo por el pensamiento sin necesidad de la observación resultaba seguro, exacto y aplicable a la realidad, por tanto proporcionaba un ideal no alcanzado por el conocimiento empírico. No es extraño que, con base en las matemáticas, Platón se planteara que el pensamiento era superior a los sentidos y la intuición a la observación. A partir de Platón la geometría comienza a construirse sobre los axiomas, que son –o se creía que eran– evidentes *a fortiori*. La geometría avanza desde los primeros principios –axiomas y postulados– mediante razonamientos deductivos hasta alcanzar los teoremas, que ya no son, ni mucho menos, evidentes. En el espacio físico real que nos muestra la experiencia, los axiomas y teoremas se tienen por ciertos de forma indiscutible. Por tanto, a Platón y los matemáticos de la Academia les parecía posible descubrir aspectos del mundo real a base de revelar lo que es evidente en sí mismo y después hacer uso de la deducción –de la demostración lógica–. Así se fueron construyendo, durante varias generaciones, por los discípulos de Platón –filósofos y matemáticos– los *Elementos* de Euclides. Esta idea ha influido decisivamente en buena parte de la filosofía, por lo menos hasta Kant, o incluso más allá, hasta la aparición de las geometrías no euclídeas.

Así pues, parece que a partir de Platón, las matemáticas son la fuente principal de la fe en la verdad exacta, eterna e intemporal, en un mundo suprasensible e inteligible. Todo razonamiento matemático exacto se refiere a objetos ideales, en contraposición a las cosas sensibles (*La República*, 510d), de modo que es natural argumentar que el pensamiento es más noble que los sentidos y los objetos ideales más reales que los sensoriales. De aquí va un paso a las doctrinas místicas de la relación del tiempo con la eternidad, que encuentran una base firme en la matemática pura platónica, cuyas entidades –los números de la aritmética y las formas de la geometría–, son entes eternos e intemporales y yacen en nuestro alma desde siempre, como vimos en la doctrina platónica de la reminiscencia del *Menón* (82b-85b), de modo que podemos concebirlos como pensamientos de dios. Por eso para Platón *dios es*

un geómetra que ama la aritmética, idea que enciende un entusiasmo místico–matemático en algunos científicos como Kepler, que, poco antes de su descubrimiento de las leyes planetarias, en un delirio pitagórico–platónico, escribe en *Harmonices Mundi* (1619), una especie de *Cantar de los Cantares* matemático dedicado al "*artífice geométrico de la creación*":

> "*La geometría existía antes de la creación. Es coeterna con la mente de Dios* [...] *La geometría ofreció a Dios un modelo para la creación* [...]. *La geometría es Dios mismo, el artista supremo*. [...] *Me abandono al frenesí sagrado*".



Johannes Kepler

Al estudiar música, teología y matemáticas, Kepler siente las reverberaciones pitagóricas y platónicas y vislumbra una imagen de la perfección cósmica del universo a través de la geometría y la música de Pitágoras y la cosmogonía geométrica del *Timeo* de Platón que atribuye al dios geómetra la función demiúrgica de diseño y construcción geométrica del Universo bajo las leyes universales de las matemáticas, que adquieren así un carácter de necesidad divina.

Vemos pues que con Platón, al profundizar en su pitagorismo, las matemáticas, sus métodos y estructuras, juegan un papel esencial en el tránsito de la primigenia religión apocalíptica homérica de los griegos a una religión racionalista mucho más humana, no exenta de misticismo, pero al tener tan gran consideración por el



El dios geómetra.
Biblia de San Luis. Catedral primada de Toledo.
La visión medieval del *dios geómetra* como arquitecto supremo del universo, que dibuja con el compás la esfera cósmica, es una alegoría de la creación como ordenación del caos primigenio, que tendría una base platónica en el *Timeo*.

proceder matemático, predomina una fusión íntima de religión y razonamiento, de aspiración moral y admiración lógica por lo eterno que va forjando una teología intelectualizada que afectará no sólo al pensamiento cristiano de teólogos como San Agustín de Hipona y Santo Tomás de Aquino, sino también al de filósofos como Descartes, Spinoza y Leibniz. Así por ejemplo, la concepción cartesiana de las matemáticas como núcleo racional del pensamiento de Descartes exige que en la duda metódica primigenia cartesiana, a partir del "*cogito, ergo sum*", no cabe dudar de la matemática ni de dios.

La filosofía platónica tuvo una influencia decisiva como apoyo intelectual de la teología cristiana. La dualidad platónica de la realidad –el mundo sensible y mundo inteligible– aplicada al ser humano, le constituye en cuerpo –el mundo de los sentidos, imperfecto, corruptible, perecedero– y el alma –inmaterial, atemporal y eterna–. El alma alberga la idea de cada uno y habita en la auténtica realidad, un mundo donde no existe el espacio ni el tiempo.

Esta antropología platónica es la base de la fundamentación filosófica del pensamiento cristiano, que pronto tratará de reconciliar *la verdad revelada* con las doctrinas platónicas. Según B. Magee (*Historia de la filosofía*. Blume, p. 29):

> "*Durante mucho tiempo se consideró a Pitágoras y Platón como "dos cristianos anteriores a Cristo" y son muchos los cristianos que han creído que la misión histórica de estos filósofos griegos universales fue la de sentar las bases teóricas que permitieron la irrupción y propagación del cristianismo*".

De este modo el cristianismo se habría consolidado como sincretismo de dos tradiciones –la evangélica y la platónica–. Por ejemplo, Clemente de Alejandría (siglo II d.C.) presentó la verdad cristiana como la culminación de la filosofía platónica ("*Platón iluminado por las Escrituras*").

El platonismo renacentista



Imagen renacentista de Platón.

Durante el Renacimiento el principal centro de influencia platónica fue la Academia Florentina –llamada también Academia Platónica de Florencia– fundada por Cosme de Médicis en 1459. Bajo la dirección de Marsilio Ficino, sus miembros estudiaron a Platón en griego antiguo antes de que el propio Ficino hiciera la primera traducción completa al latín de toda la obra de Platón y de Plotino. Los amplios comentarios de estas traducciones a las fuentes platónicas produjeron una fuerte incidencia y una gran revitalización del platonismo en la cultura italiana y europea del Renacimiento. A ello contribuyó también la llegada a Italia de numerosos sabios bizantinos con motivo del concilio de Florencia (1439) y sobre todo el exilio de muchos pensadores tras la caída de Constantinopla (1453).

El platonismo renacentista suscitará un gran debate sobre la concordia del pensamiento platónico, el cristianismo y el aristotelismo e intentará ante todo, bajo la influencia de Pico della Mirandola, la recuperación de la armonía entre la filosofía platónica y la teología cristiana.

A partir del Renacimiento los humanistas estudiaron con avidez las obras de Platón en los originales griegos redescubiertos gracias a la ingente labor de recuperación y restauración del legado clásico, colmando los ambientes intelectuales de traducciones latinas e incluso de versiones de los diálogos en lenguas vernáculas. Sobresale entre ellas la de Marsilio Ficino, uno de los más notables intelectuales humanistas que se propuso la restauración del platonismo como una especie de religión filosófica.

Debido a la fuerte emergencia de un nuevo neoplatonismo, la inspiración y la fuerte carga matemática de la filosofía de Platón desempeñaría un papel fundamental como guía cardinal del pensamiento científico de una importante pléyade de sabios e intelectuales, entre los que sobresalen Nicolás de Cusa, Giordano Bruno, Kepler, Luca Pacioli, Galileo, y otros filósofos y matemáticos; e incluso más tarde, a través de los platónicos de la escuela de Cambridge, también de Newton.

También en la filosofía de la estética y del arte la influencia de Platón ha sido muy significativa. La fuente primaria de la armonía y la proporción en el arte se encuentra en los conceptos matemáticos del universo pitagórico–platónico. Si ciertas relaciones numéricas y formas geométricas encarnaban, según el *Timeo*, la verdad absoluta de la estructura armónica y ordenada del cosmos, el arte debía dar expresión a ese orden apoyándose en la verdad eterna y universal de los números y las relaciones espaciales. Para muchos artistas renacentistas la armonía espacial será el eco visible y el espejo de la armonía cósmica platónica, así que la armonía como esencia y fuente de la belleza se concibe como la perfecta relación entre el todo y las partes y de éstas entre sí en términos de proporciones y razones matemáticas.

Entre los estudiosos del arte y artistas del Renacimiento que basan su trabajo en las concepciones platónicas sobresale L. B. Alberti, de quien destacamos algunas frases extraídas de su obra

De re aedificatoria (1450-1485):

> "*La belleza irradia en el alma humana una alegría interior que suscita un acuerdo irremplazable entre el hombre y el universo mediante el cálculo matemático, el juego de las proporciones, o en términos tomados del Timeo de Platón, de las medias pitagóricas*".
>
> "[...] *Tengo que afirmar de una vez por todas la opinión de Pitágoras y Platón de que la recta naturaleza está en todo,* [...], *y que los números determinantes de que la concordancia de las voces sea agradable a los oídos son exactamente los mismos que deleitan nuestra vista y nuestra mente*".

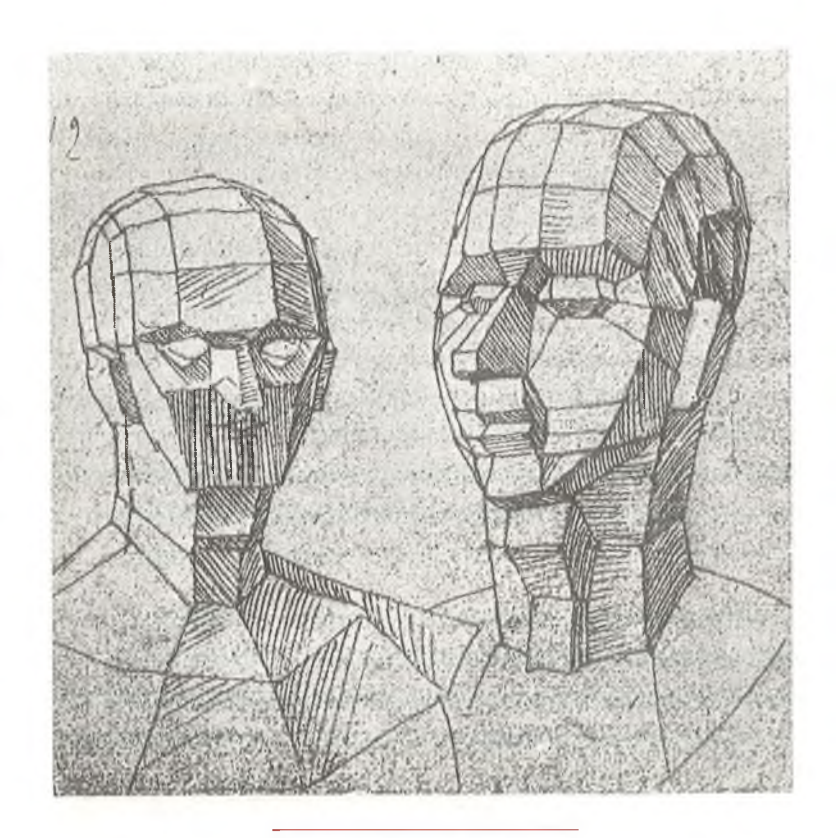
Ya el gran teórico romano de la arquitectura, Vitrubio había recurrido al *Timeo* (44d) para establecer que las proporciones del perfecto cuerpo humano deben ser el reflejo del orden y la armonía cósmicos, pudiendo por tanto ser inscrito en las formas geométricas ideales –el cuadrado y el círculo–, y así aparece el *homo ad quadratum* y el *homo ad circulum*. Además, cada parte de un edificio, tanto en el interior como en el exterior, tiene que ser integrada en un mismo sistema de relaciones matemáticas, que deben reflejar las proporciones de la figura humana. Así la filosofía platónica va imponiendo una visión estética que culmina en los teóricos y artistas del Renacimiento (Pacioli, Leonardo, Durero, Alberti, Barbaro, Palladio, etc.) que creen firmemente, con Platón, que dios al haber ordenado el universo según unas leyes matemáticas inmutables, creó un mundo bellamente proporcionado cuya armonía se refleja en el cuerpo del hombre, de donde deben surgir las proporciones de su templo terrenal.

Para el artista renacentista, beber en las fuentes pitagóricas, platónicas y euclídeas era el equivalente a la formación matemática, científica, técnica y cultural del profesional actual, de modo que

el artista cumple un papel intelectual y humanista al trascender lo meramente artesanal para convertirse en artista racional que representa la diversa realidad a partir de los principios geométricos, las técnicas artísticas y las ideas filosóficas. Al fundir, por una parte el arte con la geometría y la filosofía, y por otra, el saber clásico griego con el renacentista, el artista, como el matemático y el filósofo, se sitúa en la asamblea de los doctos, elevando las artes plásticas, antaño reducidas a mecánicas, a la misma categoría intelectual que *Las artes Liberales*, de modo que más allá de la plasmación de la percepción de los sentidos, imbuido por el idealismo platónico, el artista perseguirá la búsqueda de la idea a través del discurso mental en un progresivo proceso de racionalización del arte. Tal vez sea *La Escuela de Atenas* de Rafael el ejemplo paradigmático y más significativo de la plasmación de estas ideas.

Los poliedros, por su belleza, simetría y regularidad, y como tema esencial de la matemática pitagórica y platónica, tienen una notable incidencia en el arte del Renacimiento. Para muchos de los llamados artistas-geómetras –Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli, Alberto Durero, ...–, los poliedros, por una parte, proporcionaban excelentes modelos para los estudios sobre perspectiva, y, por otra, poseían una fuerte carga simbólica y mística de verdades religiosas o profundas ideas filosóficas. En este sentido, la asociación que hizo Platón, en el *Timeo*, entre los cinco sólidos regulares y los cuatro elementos y el Universo, será objeto de una importante consideración durante el Renacimiento, propiciada por la revitalización de los estudios platónicos. En este ámbito, debemos citar, ante todo, a Kepler, cuya cosmología y cosmogonía, como vimos, está totalmente inspirada y fundamentada en la filosofía de Platón, sobre todo en los argumentos del *Timeo*.

Pero, sin duda alguna, la influencia más importante de Platón sobre los saberes matemáticos del Renacimiento, es decir, sobre los aspectos filosóficos de las matemáticas, tiene lugar en la obra de Luca Pacioli *La divina proporción*, que, a pesar del título, está de-



Cabeza de hombre de Durero (*Cuaderno de Dresde*).

dicada en su mayor parte a un estudio exhaustivo de los poliedros. Para señalar los vínculos y la ilación entre *la sección áurea* y los sólidos platónicos, Pacioli asevera en el capítulo V, con argumentos teológicos y filosóficos de naturaleza platónica con origen en el *Timeo*, que la *divina proporción* confiere el ser formal al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo de doce pentágonos, llamado dodecaedro, el cual no se puede formar sin la mencionada *divina proporción*. Pacioli recuerda aquí, de forma muy sintética, al resto de la cosmogonía platónica que vincula los cuatro elementos con las formas y figuras de los restantes poliedros regulares, y establece con argumentos tanto matemáticos como místicos, de

orientación platónica, que mediante ellos, la *divina proporción* interviene "*en proporcionar entre sí los cinco cuerpos regulares, es decir, en imaginar la armonía y digna conveniencia entre sí y en circunscribirlos a la esfera*".

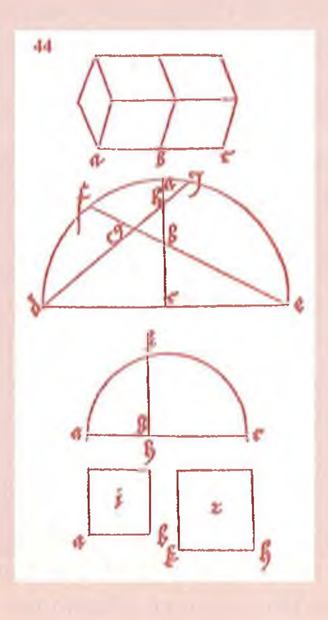
En el capítulo II, Pacioli escribe (*La divina proporción*, Akal, Madrid, 1991, pp. 36-37):

> "[...] *El genio apto para las matemáticas lo es también para las otras ciencias.* [...] *Por ello el antiguo y divino filósofo Platón negaba, no sin razón, a los que ignorasen la geometría, la entrada en su celebérrimo gimnasio, sobre cuya puerta principal colocó, en letras grandes y bien inteligibles, una breve inscripción con estas formales palabras: "Nemo huc geometriae expers ingrediatur", es decir, que no entrase quien no fuese un buen geómetra; e hizo esto porque en la geometría se encuentra oculta toda otra ciencia*".

Los trabajos de Piero della Francesca y Luca Pacioli sobre poliedros tuvieron una gran incidencia en la posterior literatura matemática vinculada al arte, sobre todo la desarrollada por Durero en su obra de 1525 *Underweysung der messung*, editado por vez primera en castellano (Akal, Madrid, 2000), con el nombre de *De la medida*. Se trata de una especie de enciclopedia geométrica para uso de pintores que pretendía dotar a la creación artística de una base científico-geométrica para que al fundamentar el arte de la pintura sobre la geometría, elevara la profesión del artista al rango de *arte liberal*. Por eso, Durero escribe (pág. 130): "*La geometría es la recta razón de toda pintura,* [...]".

A lo largo de la obra encontramos reminiscencias platónicas que nos recuerdan al *Timeo*. Durero dice que la geometría es de esencia divina, su carácter demostrativo hace partícipe al *artista–geómetra* de la verdad divina. Buena parte del Libro IV de la obra de Durero está dedicada a los sólidos platónicos y de otro tipo.

Durero y el problema platónico de la duplicación del cubo



"En una ocasión en que la ciudad de Atenas padeció la epidemia de la peste, los ciudadanos consultaron al ídolo Apolo sobre el modo en que podían librarse de ella. Él les respondió que quedarían salvados cuando doblaran su altar. Así que mandaron hacer una piedra del mismo tamaño que el altar y la pusieron encima. Mas como la peste no cesara, volvieron a preguntar al ídolo por qué pasaba esto si ellos habían cumplido su mandato.

Les respondió que no habían actuado como les había mandado, sino que habían hecho el altar bastante mayor del doble. Y como sus artífices no supieran encontrar el modo en que debían hacerlo, pidieron consejo a los sabios y en especial al filósofo Platón, que les enseñó cómo hallar entre dos líneas dadas de desigual longitud otras dos que guardasen la proporción respecto a ellas. De este modo podrían duplicar, triplicar e ir aumentando y ensanchando cada vez más el cubum, esto es, un cuerpo cuadrangular como un cubo y todas las demás cosas. Como este arte, ocultado y tenido en gran secreto por los sabios, es muy útil y sirve a todos, quiero sacarlo a la luz y enseñarlo".

Durero, De la medida *(Akal, 2000, pp. 304-305)*

Precisamente aparece un poliedro, de forma notable, en una de sus más famosas obras, *La melancolía* de 1514, un grabado pleno de simbolismo geométrico, matemático y freudiano. Entrando ya propiamente en el terreno de las matemáticas, la educación matemática y la filosofía de las matemáticas, es mucho lo que se puede y se debe decir de la influencia de Platón. A pesar de todas las críticas que se puedan hacer con más o menos acritud, nadie que conozca al personaje y su entorno académico se atreve a negar la decisiva incidencia de Platón en el desarrollo de las matemáticas como ciencia. La Academia platónica se convirtió en el centro matemático del mundo. En ella trabajaron y de ella salieron los principales investigadores del siglo IV a.C., célebres matemáticos que debatieron y resolvieron temas trascendentales de las matemáticas relacionados con sus propios fundamentos y con la metodología de la investigación y el razonamiento matemáticos. Todas ellas cuestiones de gran incidencia futura. Así, por ejemplo, en el *método analítico* como instrumento de investigación de cuestiones y problemas geométricos tienen un cierto origen remoto (y no sólo heredando el nombre de analítico) los procedimientos de la geometría analítica y el análisis matemático.

Estos asuntos, fruto de las exigencias de Platón relativas a los esfuerzos de definición, demostración y reflexión de los principios y los objetos de las matemáticas, establecerían las bases y los presupuestos de los *Elementos* de Euclides, cuya paternidad en su mayor parte, tanto en contenido como en estructura lógica, corresponde a los matemáticos de la Academia platónica, que reconstruyen las demostraciones de los teoremas pitagóricos que habían quedado invalidados por la aparición de los inconmensurables tras la resolución por Eudoxo de la correspondiente crisis de fundamentos con la *teoría de la proporción* que Euclides incluirá en el Libro V, y en la que basará toda la geometría de la semejanza del Libro VI.

La *teoría de la proporción* y el *método de exhaución* que nacen en la Academia platónica tienen una gran influencia sobre las

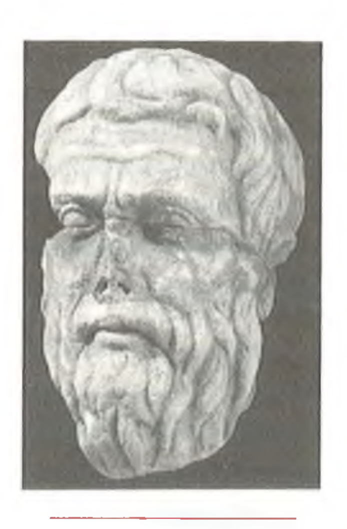
concepciones aristotélicas del infinito y la *teoría de la potencia y el acto*, y en las manos de Arquímedes se convierten en un poderoso instrumento de convalidación apodíctica de sus impresionantes resultados infinitesimales descubiertos por vía mecánica, que serán la fuente de inspiración de los matemáticos que anticipan el descubrimiento del cálculo infinitesimal en el siglo XVII y la aritmetización del análisis del siglo XIX a través del concepto de límite.

Eudoxo resuelve de forma rigurosa problemas infinitesimales que aparecerán en el Libro XII de los *Elementos*, mientras que Teeteto realiza el exhaustivo estudio de los irracionales cuadráticos que aparece en el prolijo Libro X, y el no menos completo y profundo estudio geométrico de los poliedros regulares con el que culmina, en el Libro XIII, la gran obra euclídea de los *Elementos*, una construcción ontológica y antológica de la matemática geometrizada de los griegos, de la que, por su indudable ascendencia platónica, bien podemos suscribir las palabras que escribe G. Reale en su obra Platón *En búsqueda de la sabiduría secreta* (Herder, Barcelona, 2001, pág. 213):

> "*Con todo derecho la geometría de Euclides habría que denominarla geometría platónica*".

A través de los *Elementos de Euclides*, la influencia de Platón en las matemáticas y la educación matemática ha sido inconmensurable. Pero este influjo de la obra euclidiana se extiende a toda la historia de las matemáticas, al ser el punto de partida de casi todas las investigaciones matemáticas hasta por lo menos el siglo XVII, en que aparece en escena la geometría analítica como poderoso instrumento algorítmico de resolución de problemas geométricos. Los *Elementos* de Euclides han sido la fuente más importante de conocimiento matemático. Utilizados generación tras generación, han influido sobre el rumbo de las matemáticas y de la educación matemática, más que ningún otro texto. La composición magistral de Euclides como tratado geométrico magníficamente organizado

con una inefable habilidad expositiva, estructurado por imperativo platónico de forma axiomático–deductiva, además de ser la primera obra matemática fundamental que ha llegado hasta nosotros, ha sido la más venerada y ha tenido más ascendencia que ningún otro texto matemático, oscureciendo cualquier otro trabajo precedente sobre la materia, de modo que la obra euclidiana se ha convertido en un texto paradigmático y normativo.



Platón en una réplica helenística de un busto realizado por Silanion (hacia 370 a.C.), quizá la escultura más antigua de Platón que se conserva. Museo Arqueológico de Tasos.

La Academia de Atenas fue durante el periodo clásico helénico el núcleo principal de la especulación filosófica y matemática del mundo griego, y aunque el centro de gravedad de la actividad matemática se desplazó en la época helenística, en torno al año 300 a.C. hacia Alejandría, la Academia siguió ostentando su preeminencia en filosofía durante todo el periodo alejandrino. De hecho la actividad filosófica duró casi 900 años hasta su clausura en el año 529 d.C. por el emperador bizantino Justiniano, aduciendo que "*enseñaba conocimientos paganos y perversos*".

Las matemáticas son para la Academia platónica la piedra angular del conocimiento. Por eso en la institución de Platón está "*prohibida la entrada a toda persona que no sepa geometría*". Efectivamente, no sólo la geometría tiene una trascendencia cardinal en el pensamiento de Platón sino también las demás ciencias del llamado *quadrivium pitagórico*. Todavía mucho más tarde, ya hacia el año 500 de nuestra era, el filósofo y matemático neopitagórico Boecio, que es precisamente quien acuña el término de *quadrivium* seguía

insistiendo acerca del carácter preliminar de las artes matemáticas como introducción a la filosofía (*Institutio Arithmetica*, Universidad de León, 2002, cap. 1, pp. 23-24):

> "*Entre los hombres de autoridad inveterada que guiados por Pitágoras y Platón han mostrado el resplandor supremo de su espíritu y la fuerza de su pensamiento, se tiene la opinión de que no llegó nadie en los conocimientos de filosofía a la perfección consumada si el acrecentamiento de tan noble sabiduría no pisaba, por así decir, en cuatro vías* [las cuatro ciencias o artes de *quadrivium pitagórico*: aritmética, geometría, música y astronomía]. [...] *Si el investigador carece de estas cuatro disciplinas, no puede encontrar la verdad y sin esta reflexión sobre la verdad nadie puede tener un conocimiento cierto*".

Continúa el texto de Boecio recordando a Platón en estos términos:

> "*Quien olvida las cuatro vías ha echado a perder toda la enseñanza, ya que por ellas han de caminar a través de los conceptos matemáticos quienes quieren llegar a las abstracciones más ciertas con el ojo de la inteligencia, que según dice Platón* [*La República*, 527e] *es más digno de ser preservado y desarrollado que los ojos del cuerpo. Y con sólo este ojo se puede investigar la verdad.* [...] *Este ojo está sumergido y enterrado por los sentidos corporales hasta que las enseñanzas de la cuádruple vía lo iluminan*".

Boecio alude a las múltiples y reiteradas reflexiones de Platón en *La República* acerca de la importante misión pedagógica que las matemáticas tienen en la educación, término que en griego –*paideia*– se refiere al cultivo del ser humano en todas sus facetas con la intención de convertirlo en un buen ciudadano que ame el bien y la justicia, es decir, que sea virtuoso. Con razón, Rousseau,

en su emblemático tratado sobre la educación, *Emilio*, pondera el valor de *La República* más que como una obra de política como el más sublime tratado de educación, cuando escribe:

> "*Si queréis formaros una idea de la educación pública, leed La República, de Platón. No es, pues, una obra de política, como piensan los que juzgan los libros por su título, sino que es el más excelente tratado de educación que se haya escrito*".

Las cuatro *artes liberales* del *quadrivium* tuvieron secular fortuna en los programas educativos de las universidades medievales y han sido el núcleo de la tradición pedagógica occidental, sobre todo la aritmética y la geometría, hasta hace pocas décadas. En este aspecto la herencia de Platón también es trascendental.

La filosofía de las matemáticas de Platón –que tanta influencia ha tenido en la evolución ulterior de esta ciencia– ha configurado secularmente lo que se llama platonismo en las matemáticas como firme creencia en la existencia de entidades matemáticas abstractas propias del espíritu humano, pero independientes de él. A este respecto escribe G. H. Hardy en su obra *Apología de un matemático* (Nivola. Madrid, 1999. pp. 114-115):

> "*Creo que la realidad matemática se encuentra fuera de nosotros y que nuestra misión es descubrirla u "observarla", y que los teoremas que nosotros demostramos y que grandilocuentemente describimos como "creaciones" nuestras, son simplemente las notas de nuestras observaciones. Este punto de vista ha sido mantenido de una forma u otra por muchos filósofos de elevada categoría, desde Platón hasta nuestros días* [...]".

La concepción ontológica platónica de los entes matemáticos ha ejercido a lo largo de toda la historia una singular atracción

sobre todos los matemáticos y ha contribuido a fijar la forma, las raíces y las características del pensamiento matemático, pues como escribe J. Mosterín en su *Historia de la filosofía. La filosofía griega prearistotélica* (Alianza Editorial, Madrid, 1995. pp. 230-231):

> *"Aún hoy en día el platonismo –depurado de sus múltiples elementos míticos– sigue siendo una de las filosofías de la matemática más vivas e influyentes. Muchos matemáticos actuales piensan que están investigando el mundo de las estructuras abstractas y sus interrelaciones, un mundo eterno, necesario e independiente de nosotros, [...]. De hecho, a este tipo de filosofía de la matemática se le sigue llamando platonismo".*

El idealismo platónico y la investigación sin perseguir la utilidad inmediata han formado parte siempre de la filosofía de trabajo del matemático. En este sentido, buena parte de los matemáticos son platónicos y les fascina su afinidad espiritual con el fundador de la Academia.

La alta valoración de la que siempre han gozado las matemáticas y su consideración como expresión de los más elevados intereses especulativos del hombre incidentes sobre la filosofía y la ciencia, la política y el arte, la educación y la cultura en general, es de origen platónico. Sin ser propiamente un matemático, es impresionante el impacto de Platón sobre el rumbo que tomaría, a partir del siglo IV a.C., la más antigua de las ciencias, las matemáticas.

La vigencia de Platón también en la modernidad es proclamada en el capítulo IV de la famosa *Historia de la filosofía griega* de W. K. C. Guthrie (RBA ediciones, Barcelona, 2006, pág. 257), con estas palabras:

> *"A pesar de su falta de método experimental, la teoría geométrica platónica del mundo ha vuelto a recibir el aprecio debido*

como prueba de una brillante capacidad de penetración natural en la estructura de la materia. Whitehead había escrito ya en 1929 que "Newton se habría mostrado sorprendido ante la teoría moderna y la disolución de los quanta en vibraciones, en cambio Platón lo habría esperado". [...] *Ahora Popper afirma que la teoría geométrica de la estructura del mundo, que aparece por primera vez en Platón, ha sido la base de la cosmología moderna desde Copérnico y Kepler, a través de Newton, hasta Einstein, y la opinión de Heisenberg de que la tendencia de la Física moderna se haya más próxima al Timeo que a Demócrito".*

Para finalizar, recogemos de nuevo palabras de Bertrand Russell para expresar que pocos filósofos y científicos han alcanzado la amplitud y profundidad del pensamiento de Platón, que ninguno le ha superado, y que cualquiera que aborde la investigación filosófica, científica o matemática hará mal en ignorarle. Apoyemos estas palabras con el testimonio del filósofo, lógico y matemático Alfred N. Whitehead –maestro y colaborador de B. Russell en su *Principia mathematica*–, que quiso rendir un encomiástico tributo a Platón al escribir en su obra *Process and Reality. An Essay in Cosmology* de 1929, el siguiente panegírico:

"La más acertada descripción del conjunto de la tradición filosófica europea es la que consiste en una serie de notas a pie de página a la obra de Platón".

Bibliografía

Obras de Platón

PLATÓN: *Diálogos: Menón, Fedón, República, Teeteto, Timeo, Filebo, Leyes, Epinomis* (en *Obras Completas*). Introducción de J. A. Míguez. Aguilar, Madrid, 1969.

PLATÓN: *La República* (en *Diálogos*, Tomo IV). Introducción de C. Eggers. Gredos, Madrid, 1986.

PLATÓN: *La República*. Introducción de J. B. Bergua. Clásicos Bergua, Madrid, 1996.

PLATÓN: *La República*. Introducción de M. Fernández-Galiano. Alianza Editorial, 1994.

PLATÓN: *La República o El Estado*. Introd. de Miguel Candel. Austral, Madrid, 2003.

PLATÓN: *El Timeo* (en *Diálogos*, Tomo VI). Introd. de A. Durán y F. Lisi. Gredos, Madrid, 1986.

PLATÓ: *Timeu* (en *Diàlegs*, Vol.XVIII). Bernat Metge, Barcelona, 1990.

PLATÓ: *República V, VI, VII* (en *Diàlegs*, Vol.XI). Bernat Metge, Barcelona, 2000.

Obras sobre Platón

BRUN, J.: *Platon et l' Académie*. PUF, ¿Que sais-je? París, 1999. Cap. 5.

BRUN, J.: *Platón y la Academia*. Paidós. Barcelona, 1992. Cap.5.

CONFORD, F.: *La teoría platónica del conocimiento.* Paidós, Buenos Aires, 1968. Barcelona, 1991.

CROMBIE, I.: *Anãlisis de las doctrinas de Platón*. Alianza Universidad, Madrid, 1998. Vol.1. Cap.3.

FOWLER,D.: *The Mathematics of Plato's Academia*. Oxford U.P. Nueva York, 1999. Caps. 2.2, 4, 8.3.

GOURINAT, J.: "Platon et l'invention de la science" (en *Les philosophes et la science*). Gallimard, París, 2002. Cap.1.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.: 2001. "La implicació de la matemàtica en l'educació, segons Plató". Bulletí 09/2001 ABEAM, pp.13-15, 2001.

GUTHRIE, W.: *Historia de la filosofía griega. Platón y la Academia de Atenas*. Gredos, Madrid, 1992. Vols. 4, 5. Nueva edición RBA, Barcelona, 2006.

HARE, R.: *Platón*. Alianza Editorial, Madrid, 1982.

MILHAUD, G.: "Platon" (en *Les philosophes-géomètres de la Grèce*. Libro2). Librairie Germer Baillière, París, 1900. Arno Press NYT, New York, 1976.

REALE, G.: *Platón. En búsqueda de la sabiduría secreta*. Caps. 7, 8, 9. Herder, Barcelona, 2001.

REALE, G.: *Por una nueva interpretación de Platón*. Apéndice. Caps. 10,20. Herder, Barcelona, 2003.

ROSS, D.: *Teoría de las ideas de Platón*. Cátedra, Col. Teorema, Madrid, 2001.

VALLEJO, A.: *Platón, el filósofo de Atenas*. Montesinos, Barcelona, 1996. Caps. 3, 5.

VERA, F.: "Platón" (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970.

Ediciones de los *Elementos* de Euclides

ENRIQUES, F.: *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna. Libros* I-IV. Instituto Jorge Juan (CSIC). Madrid. 1954.

EUCLIDES: *Los seis primeros libros de los Elementos*. Traducción de Rodrigo Çamorano. Casa de Alonso de la Barrera. Sevilla, 1576. Nueva edición de 1999 de Ediciones Universidad de Salamanca.

EUCLIDES: *Elementos*. Introd. de L. Vega, traducción y notas de M. L. Puertas. Gredos. Madrid, 1996.

EUCLIDES: *Elementos*. Trad. y notas J. D. García Bacca. Universidad Nacional Autónoma de México, 1944.

HEAT, T. L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover. Nueva York, 1956.

PEYRARD, F.: *Les Oeuvres d'Euclide*. C. F. Patris, París, 1819.

VERA, F.: *Los Elementos de Euclides* (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970.

Otras obras de matemáticos griegos

ARQUÍMEDES: *El Método*. Introducción de J. Babini. EUDEBA, Buenos Aires, 1966. Introducción.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M; VAQUÉ, J.: *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Pub. Univ. Autón. Barcelona, Ed. Univ. Politěc. Catalunya. Colección *Clásicos de las Ciencias*. Barcelona, 1993. Edición crítica en español de esta obra de Arquímedes. Apéndice 1.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M; y VAQUÉ, J.: *Mětode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1997. Edició crítica en català d'aquesta obra d'Arquimedes. Cap.2.

VER EECKE, P.: *Les Coniques d'Apolonius de Pergue*. Blanchard, París, 1959.

VER EECKE, P: *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathěmathique*. Blanchard. París, 1982. L. VII.

VERA, F.: *Científicos griegos* (Ediciones en español de *Las Cónicas* de Apolonio, *La Aritmética* de Diofanto y *La Colección Matemática* de Pappus). Aguilar, Madrid, 1970.

Bibliografía de historia de la ciencia y de las matemáticas

BELL, E..: *Les grands mathématiciens*. Payot. París, 1950. Cap. 1.

BELL, E.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica, Měxico, 1985. Cap. 1.

BERNAL, J.: *Historia social de la Ciencia*. Península, Barcelona, 1979. Vol. 1. Cap. 4.6.

BOECIO: *Institutio Arithmethica. Fundamentos de Aritmética*. Edición de M. A. Sánchez. Universidad de León, 2002. Cap. 1.

BOYER, C. B.: *History of Analytic Geometry*. Scripta Mathematica. Yeshiva Univ. New York, 1956. Cap. 1.

BOYER, C. B.: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad Textos, Madrid, 1986. Cap. 6.

BOYER, C: *The History of the Calculus and its conceptual development*. Dover, N. Y. 1949. Cap. 2.

BUNT, L.: *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Dover, New York, 1988. Cap. 3.

CAJORI, F.: *A History of Greek Mathematics*. The MacMillan Company. Londres, 1919. Cap. 3.4.

COLERUS, E.: *Breve historia de las matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972. Vol. 1. Caps. 1, 2.

COOLIDGE, J. L.: *The Mathematics of great amateurs*. Dover, New York, 1937. Cap. 1.

DHOMBRES, J.: *Mathématiques à fil des âges*. GauthierVillars, París, 1990. Cap. 1.

EVES, H.: *Great Moments in Mathematics*. The Math. Assoc. of America, 1977. Vol. 1. Caps. 5, 6.

EVES, H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing, New York, 1983. Caps. 3.5, 3.7, 5.5.

FARRINGTON, B.: *Ciencia griega*. Icaria, Barcelona, 1979. Parte I. Cap. 7.

FRITZ, K.: "The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum". Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945.

GARCÍA BACCA, J.: *Textos clásicos para la historia de las ciencias.* Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1961.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo* XVII. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Cap. 1.2.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton*). Universidad de Sevilla, 2000. Cap. 1.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.: "La aparición de los inconmensurables". *Mundo Científico*, 220, pp. 56-63, Barcelona, 2000.

GONZALEZ URBANEJA, P. M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola, Madrid, 2001. Caps. 1, 3, 6, 7.

GONZALEZ URBANEJA, P. M.: *Los orígenes de la geometría analítica*. Fundación Canaria *Orotava* de Historia de la Ciencia, Tenerife, 2003. Cap. 2.2, 3, 4.

GUILLÉN, G.: *El mundo de los poliedros*. Síntesis. Madrid, 1997.

HEAT, T.: "Greek Geometry whith Special Reference to Infinitesimals". The Matematical Gazzete, XI, 248-59, 1922-23.

HEAT, T.: *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981. Vol. 1. Caps. 9, 10.

ITARD, J.: *Essais d'Histoire de les Mathématiques*. Blanchard, París, 1984. Cap. II.1.

KLEIN, J.: *Greek mathematical thought and the origin of algebra*. Dover, New York, 1992. Caps. 3, 7.

KLINE, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Vol. 1. Caps. 3.8, 3.9, 3.10, 4.5.

KNORR, W. R.: *The ancient tradition of geometric problems*. Dover, New York, 1981. Cap. 3.

LAWLOR, R.: *Geometría Sagrada. Filosofía y Práctica*. Debate. Madrid, 1993. Cap. 10.

LORIA, G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthier-Villars, París, 1929. Cap. 2.

MANKIEWICZ, R.: *Historia de las Matemáticas*. Barcelona, 2000. Cap. 4.

MAZA, C.: *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*. Un. Sevilla, 2000. Cap. 6.3, 6.8.

MILLÁN, A.: *Euclides, la fuerza del razonamiento matemático*. Nivola, Madrid, 2004. Caps. 1, 2, 3.

MONTESINOS, J. (Coordinador): *Historia de la Geometría griega*. Actas del Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992. Caps. 6, 7.

MONTESINOS, J.: *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Síntesis. Madrid. 2000. Caps. 1.2, 1.3.

MONTUCLA, J.: *Histoire des Mathématiques*. 3 vols. Blanchard. París, 1968. 1.3.13-1.3.18.

NICOLAU, F.: *La Matemàtica i els matemàtics*. Claret, Barcelona, 2000. Caps. 7, 8.

PACIOLI, L.: *La divina proporción*. Intrd. de A. Mieli. Losada. Buenos Aires. 1946.

PACIOLI, L.: *La divina proporción*. Introd. de A. M. González. Akal, Madrid, 1992. Cap. LV.

PEIFFER, J.: *Histoire des Mathématiques. Études vivantes*. París, 1982. Cap. 2.6.

REY, A.: *El apogeo de la ciencia técnica griega*. UTEHA, México 1962. Vol. 2, Caps. 1, 2, 3, 8, 9, 10.

REY PASTOR, J.; BABINI, J: *Historia de la Matemática*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951. Caps. 2.7.4, 2.9.

REY PASTOR, J.; BABINI, J: *Historia de la Matemática*. Gedisa. Barcelona, 1984. Vol. 1, Cap.3.6.

RÍBNIKOV, K.: *Historia de las Matemáticas*. MIR, Moscú, 1974. Cap. 3.2.

ROUSE BALL, W: *Histoire des Mathématiques*. Libr. scientifique A. Hermann, París, 1906. Cap. 3.

SCOTT, J.: *A History of Mathematics*. Taylor and Francis, New York, 1975. Cap. 2.

SMITH, D.: *History of Mathematics*. Dover. New York, 1958. Vol. 1. Caps. 3.5, 4.2.

SUTTON, D.: *Sólidos Platónicos y Arquimedianos*. Ed. Oniro, Barcelona, 2002.

SZABÓ, A.: *Les débuts des mathématiques grecques*. Librairie Vrin. París, 1977. Caps. 1, 2, 3.

SZABÓ, A.: "The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms". Scripta Mathematica, vol. XXVII, 1.

TANNERY, P.: *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars. París, 1887. Cap. 10.

TATON, R. (compilador): *Historia general de las ciencias*. Orbis. Barcelona, 1988. Vol. 1. Libro 1. Cap. 3.

VERA, F: *Breve historia de la geometría*. Losada. Buenos Aires, 1963. Cap. 2.

WUSSING, H.: *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI. Madrid, 1989. Cap. 3.3.